




Informe 2 – Péndulo simple analizado con estadística.

Miembros del grupo: 

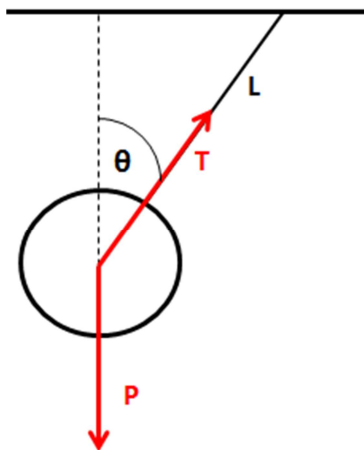


Objetivos: Usando como objeto de estudio un péndulo simple, buscamos determinar con la mayor exactitud posible el valor de la aceleración gravitatoria local (g), poniendo a prueba los procedimientos para el análisis estadístico de datos estudiados anteriormente.

Fundamento teórico:

- *Péndulo simple:* el péndulo simple es la idealización de un péndulo real que consiste en una masa (m) suspendida de un soporte mediante un hilo de masa despreciable en comparación a m . En el caso ideal, se considera m una masa puntual, un soporte fijo y un hilo flexible, inextensible y sin masa. También se supone el movimiento de la masa restringido a un plano, despreciando las fuerzas de rozamiento con el aire y el soporte.

Sea L el largo del hilo y θ el ángulo que este forma con la vertical y g la aceleración gravitatoria (vertical hacia abajo). Realizando el diagrama de cuerpo libre de la masa obtenemos:



Planteando la segunda Ley de Newton:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

Dado que en la componente radial no hay aceleración, el movimiento se reduce a la componente tangencial, resultando:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \cdot \sin \theta$$

Despejando y tomando la aproximación de pequeñas oscilaciones obtenemos la ecuación del movimiento:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (1)$$

Sabemos que la ecuación de movimiento armónico simple (como es el caso del péndulo) es de la forma:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \quad (2)$$

Despejando ω de (2) y reemplazando en (1)

$$\omega = \sqrt{\frac{\ddot{\theta}}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Además, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ siendo T el período del péndulo (es decir, el tiempo que demora este en hacer un ciclo). Finalmente despejando T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3)$$

**Procedimiento:**

Para poner en práctica lo estudiado sobre estadística nos propusimos realizar varias medidas del período de un péndulo, que construimos colgando una pequeña masa esférica de un soporte fijo mediante una tanza muy fina (de largo $L = 0,94\text{m}$); además ubicamos un semicírculo sobre el mismo soporte (*imagen1*) para asegurarnos de siempre hacer oscilar el péndulo a partir del mismo ángulo (tomamos 5° para poder usar las aproximaciones de pequeñas oscilaciones), ya que al trabajar con datos estadísticos es importante realizar todas las medidas en las mismas condiciones para evitar que la magnitud estudiada varíe entre una y otra.

Una vez que nuestro dispositivo estuvo listo, empezamos con las medidas; para cada una de estas hicimos oscilar el péndulo durante 10 períodos y los registramos de dos maneras distintas: por un lado medimos con un sensor infrarrojo (*imagen2*) y promediamos los 10 valores tomados, mientras que al mismo tiempo medimos con un cronómetro el tiempo total para luego dividirlo entre 10, lo cual nos dio un mejor tiempo de reacción, además de reducir la incertidumbre de los datos tomados.

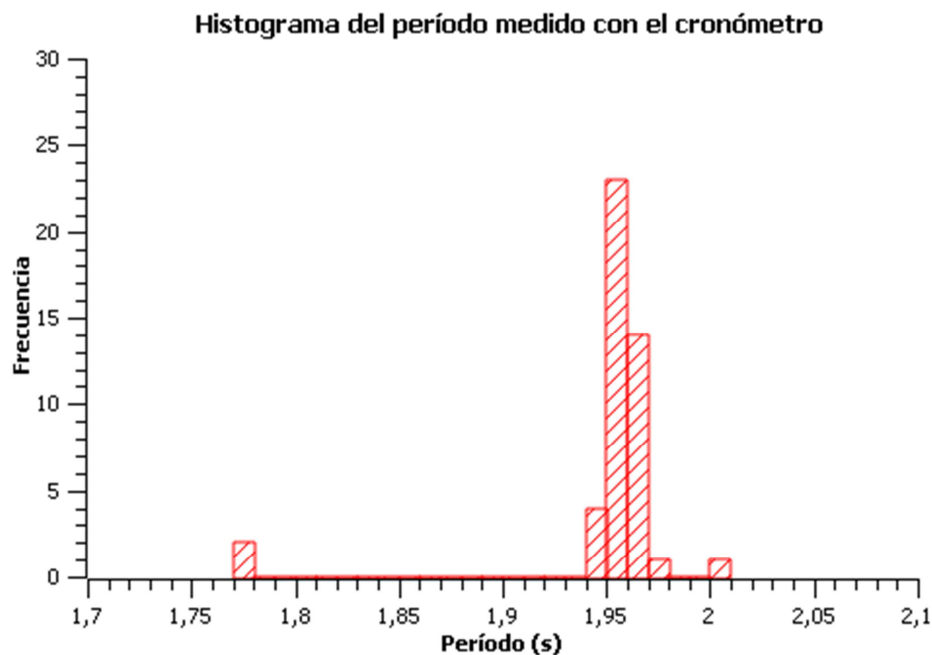
Repetimos el procedimiento 45 veces para tener los suficientes datos como para realizar un análisis estadístico.

**Imagen 1****Imagen 2**

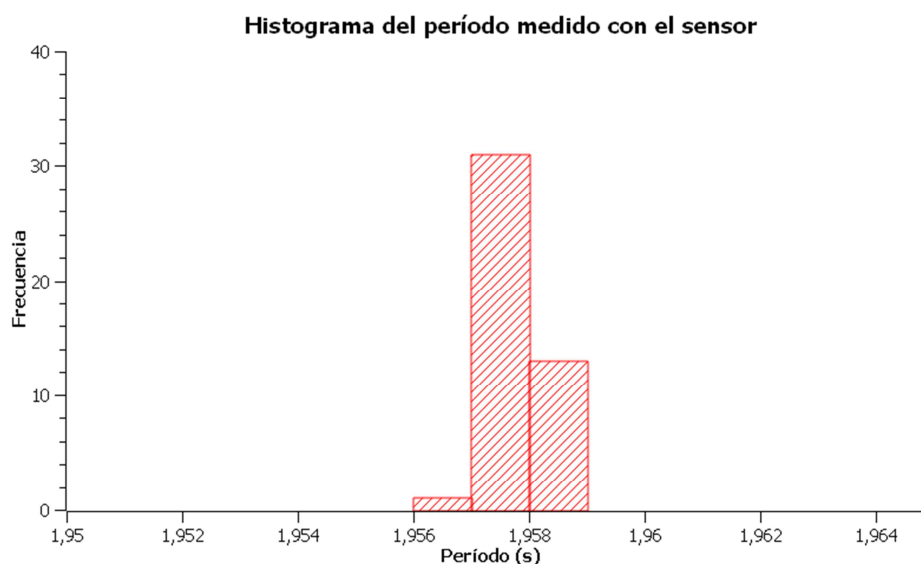
Finalmente determinamos las incertidumbres de cada una de las medidas tomadas: para el largo de la cuerda usamos $\pm 0,1\text{cm}$, para los valores del período tomados por el sensor $\pm 0,001\text{s}$ y para los que medimos por el cronómetro $\pm 0,05\text{s}$; para este último consideramos además de la apreciación del instrumento el tiempo de reacción de quien lo manipuló, por lo que podemos afirmar que las medidas tomadas con el sensor serán más exactas.

Análisis de datos:

Con los datos obtenidos experimentalmente realizamos los histogramas correspondientes a cada método de medición:



En este histograma se puede apreciar cómo algunos de los valores medidos (1,77 y 2,01) son atípicos en comparación al resto, por lo cual son candidatos al descarte que será realizado posteriormente. Dejando estos de lado, se puede apreciar una distribución bastante semejante a la esperada (Gaussiana).



En el segundo histograma podemos ver una distribución Gaussiana de manera más directa que en el anterior y no parece que ninguno de los valores tomados sea candidato al descarte. Comparando ambos histogramas, corroboramos que el sensor posee una mayor exactitud.



Calculamos promedio (\bar{x}) y desviación standard (S_n) para cada caso, ya que son parámetros de la curva Gaussiana (que representamos posteriormente) y resultan útiles para aplicar un buen método de descarte:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad S_n = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}$$

Siendo n la cantidad de medidas tomadas.

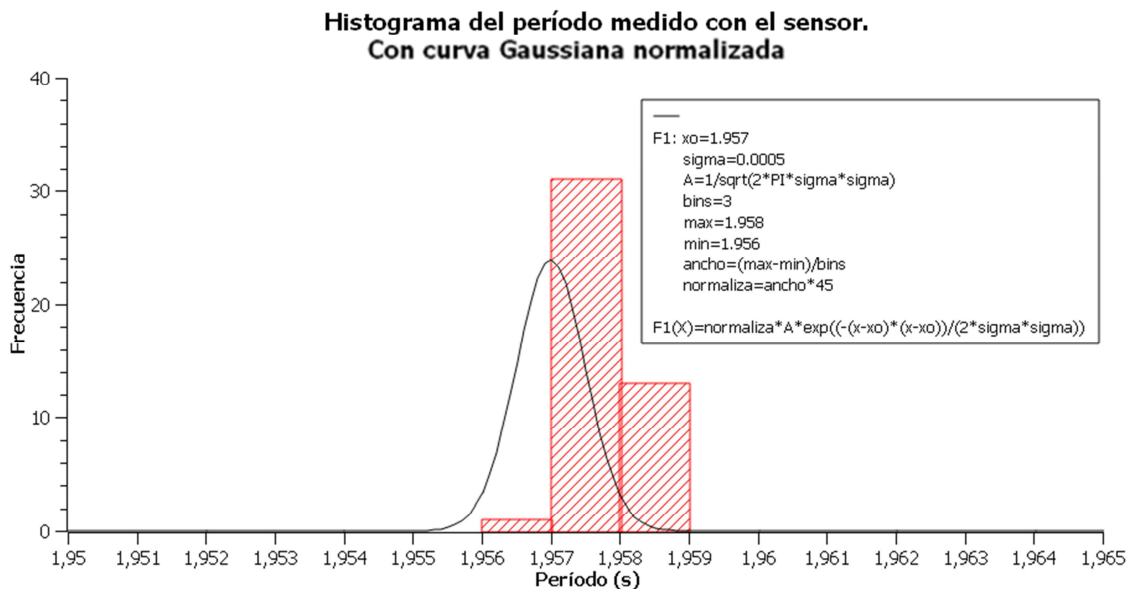
Medido con	Promedio (s)	Desviación Standard (s)
Cronómetro	1,95	0,04
Sensor	1,957	0,0005

Finalmente, representamos sobre cada histograma la curva Gaussiana dada por la ecuación:

$F(x) = \frac{e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ Pero, dado que μ y σ no son posibles de determinar experimentalmente, utilizamos las aproximaciones de $\bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$ y $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$, resultando entonces en:

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2S_n^2}}}{\sqrt{2\pi S_n^2}}$$

Luego normalizamos las mismas, de manera que el área bajo la curva Gaussiana sea igual al área del histograma.

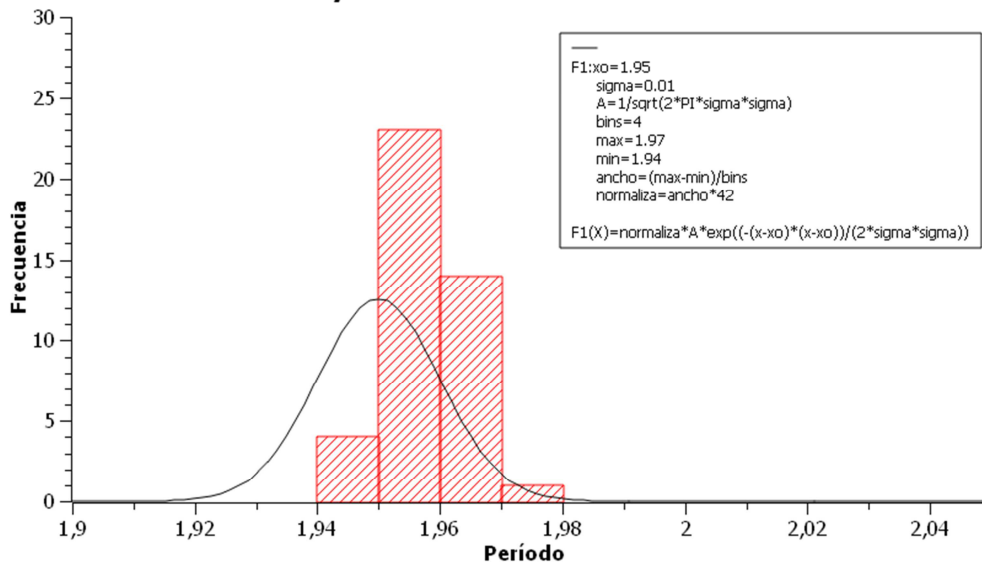




Usando el criterio de eliminación de datos, descartamos en el caso del cronómetro aquellos valores que se encontraban a más de $2S_n$ del promedio (1,77 y 2,01), ya que al esperar una distribución Gaussiana de los datos la probabilidad de encontrar valores fuera de este intervalo es menor al 0,6%. En el caso del sensor no hubo datos descartados por este criterio. Con nuestro nuevo conjunto de datos volvemos a calcular promedio y desviación standard:

$$\bar{x} = 1,95 \text{ s} \quad S_n = 0,01 \text{ s}$$

Histograma del período medido con el cronómetro (con datos descartados) y curva Gaussiana normalizada



Expresamos los períodos resultantes de cada caso de la forma: $T = \bar{x} \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

Medido por el cronómetro: $T = \left(1,95 \pm \frac{0,01}{\sqrt{42}}\right) \text{ s}$

Medido por el sensor: $T = \left(1,957 \pm \frac{0,0005}{\sqrt{42}}\right) \text{ s}$

A partir de estos valores podemos calcular g despejando en la ecuación (3): $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot L$

En el caso del cronómetro: $g = (9,76 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$

En el caso del sensor: $g = (9,690 \pm 0,010) \text{ m/s}^2$

Ninguno de los valores de g calculados a partir de los datos experimentales es concordante con el valor aceptado para g . Sin embargo, esto podría deberse, entre otras cosas, a que el péndulo utilizado en la práctica no se aproximó lo suficiente al modelo de péndulo simple.

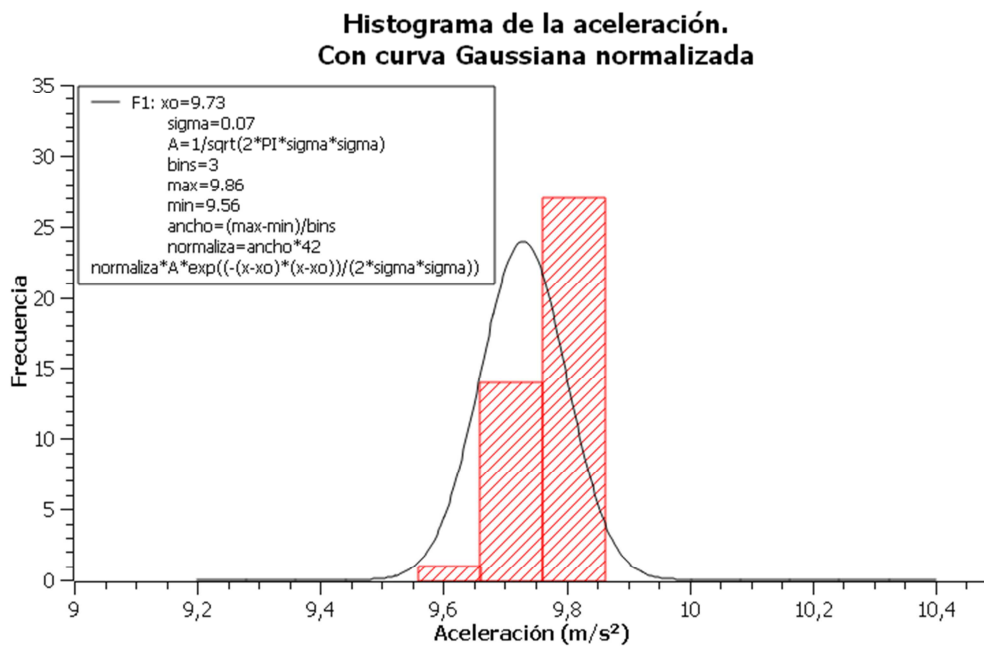
Una observación a destacar es que a pesar de considerar al sensor como el método más exacto, el valor calculado con los datos tomados por el cronómetro se acercó más al esperado. Por esto, estos últimos fueron los elegidos para hallar g por un segundo método:



Volvimos a calcular g a partir de la ecuación (3), pero esta vez hallamos un valor de g para cada una de las medidas del período tomadas por el cronómetro (menos las que ya habían sido descartadas).

Período (s)	Valor de g calculado (m/s^2)
1,94	9,86
1,95	9,76
1,96	9,66
1,97	9,56

A partir de estos datos construimos un histograma.



Tomando el promedio (9,73) y la desviación standard (0,07) de los datos, expresamos g de la siguiente manera:

$$g = \left(9,73 \pm \frac{0,07}{\sqrt{42}} \right) m/s^2$$

Conclusiones:

Si bien no obtuvimos valores concordantes, todos los valores de g hallados fueron más cercanos entre sí y del valor esperado de lo que suponíamos en un principio, en especial los obtenidos por el cronómetro. Acerca de la distribución en los histogramas, en los referentes al período observamos más similitud con la distribución normal que en el de la aceleración. Creemos que esto puede deberse al tamaño de los intervalos.