# Funciones, Límites y Continuidad

1. Para las siguientes funciones lineales: $f : \Re \to \Re,\ f(x) = 3x + 6$, $g : \Re \to \Re,\ g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $h : \Re \to \Re,\ h(x) = 2 - x$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(2),\ g(-1),\ h(\frac{1}{2})$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(|x|),\ f_2(x) = f(x) + 2,\ f_3(x) = f(x - 3),\ f_4(x) = f(x + 5),\ f_5(x) = |f(x)|$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(|x|),\ g_2(x) = g(x) + 1,\ g_3(x) = g(x - 1),\ g_4(x) = g(x + 1),\ g_5(x) = |g(x)|$
   (e) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $h(x),\ h_1(x) = h(|x|),\ h_2(x) = h(x) - 1,\ h_3(x) = h(x - 2),\ h_4(x) = h(x + 2),\ h_5(x) = |h(x)|$
   (f) ¿Observa alguna relación entre la función $f$ y las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$?

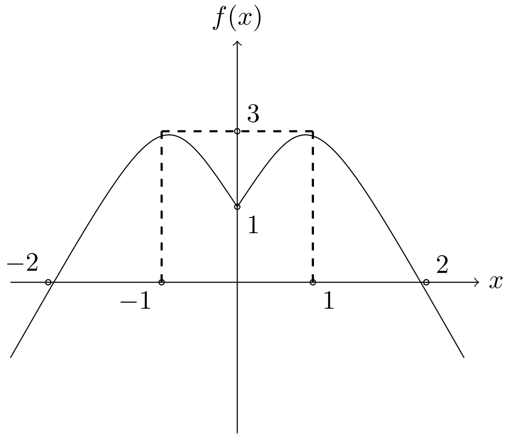
2. Dadas las siguientes funciones cuadráticas $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = -2x^2 - 1$ $h : \Re \to \Re$, tal que $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(3),\ g(\frac{1}{3}),\ h(-2)$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + 1,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - 1,\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
   (e) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $h(x),\ h_1(x) = h(x) + 3,\ h_2(x) = |h(x)|,\ h_3(x) = -h(x)$
   (f) Discutir según $a \in \Re$ cómo son las raíces de la función $f(x) + a$

3. Dadas las siguientes funciones polinómicas $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = x^2 - x - 6$ $h : \Re \to \Re$, tal que $h(x) = 16 - x^4$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(3),\ g(\frac{1}{3}),\ h(-2)$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + 1,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   ¿Observa alguna relación entre las funciones?
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - 1,\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
   ¿Observa alguna relación entre las funciones?
   (e) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $h(x),\ h_1(x) = h(x) + 3,\ h_2(x) = |h(x)|,\ h_3(x) = -h(x)$
   ¿Observa alguna relación entre las funciones?

4. Dadas las siguientes funciones racionales $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $h : \Re \to \Re$, tal que $h(x) = \frac{x}{2-x}$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(3),\ g(\frac{1}{3}),\ h(-2)$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + 1,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - 1,\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
   (e) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $h(x),\ h_1(x) = h(x) + 3,\ h_2(x) = |h(x)|,\ h_3(x) = -h(x)$

5. Dadas las siguientes funciones trigonométricas $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = sen(x)$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = cos(x)$ $h : \Re \to \Re$, tal que $h(x) = tg(x)$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(0),\ g(\frac{\pi}{2}),\ h(\pi)$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + \pi,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - \frac{\pi}{2},\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
   (e) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $h(x),\ h_1(x) = h(x) + \frac{\pi}{4},\ h_2(x) = |h(x)|,\ h_3(x) = -h(x)$
6. Indicar para las siguientes funciones $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = e^x$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$
   (a) Dominio, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(0),\ g(\frac{1}{9})$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + 1,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - 1,\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
7. Indicar para las siguientes funciones logaritmicas $f : \Re \to \Re$, tal que $f(x) = Ln(x)$, $g : \Re \to \Re$, tal que $g(x) = Ln|x|$
   (a) Dominios, recorrido, raíces, corte con eje $\overrightarrow{oy}$ y signo de cada función.
   (b) Calcular $f(3),\ g(-e)$.
   (c) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $f(x),\ f_1(x) = f(x) + 1,\ f_2(x) = |f(x)|,\ f_3(x) = -f(x)$
   (d) Representar gráficamente en el mismo par de ejes coordenado:
   $g(x),\ g_1(x) = g(x) - 1,\ g_2(x) = |g(x)|,\ g_3(x) = -g(x)$
8. Dada una función $f : \Re \to \Re,\ c \in \Re$, se definen las siguientes funciones:
   $f_1(x) = f(x) + c,\ f_2(x) = f(x + c),\ f_3(x) = |f(x)|$
   Representar gráficamente $f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ para las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 1$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = e^x$ (e) $f(x) = e^{-x}$
9. Se considera la función $f : \Re \to \Re$, representada gráficamente por:




Responder:

(a) ¿$f$ es inyectiva?, ¿$f$ es sobreyectiva?
(b) ¿En qué intervalos la función es positiva y en cuáles negativa?
(c) ¿Cuáles son las raíces?
(d) ¿En qué intervalos es invertible?

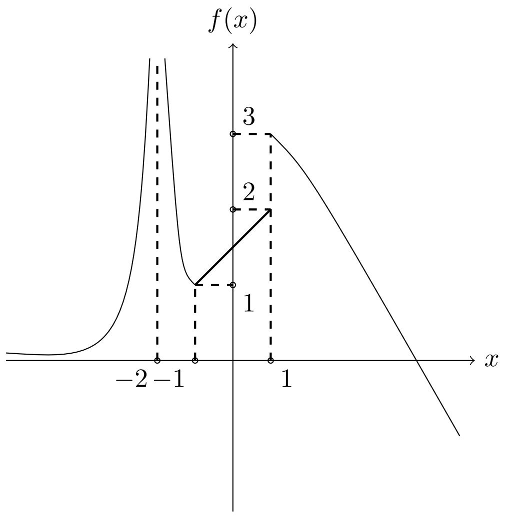
# Límites

Sea $f : I \to \Re$, $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \epsilon \in \Re, \exists \delta > 0, \delta \in \Re \ / \ \forall x \in I \ si \ |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

10. Demostrar con la definición de $\varepsilon$ - $\delta$ los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to 1} 2x + 1 = 3$ (b) $\lim_{x\to 2} -x - 3 = -5$ (c) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

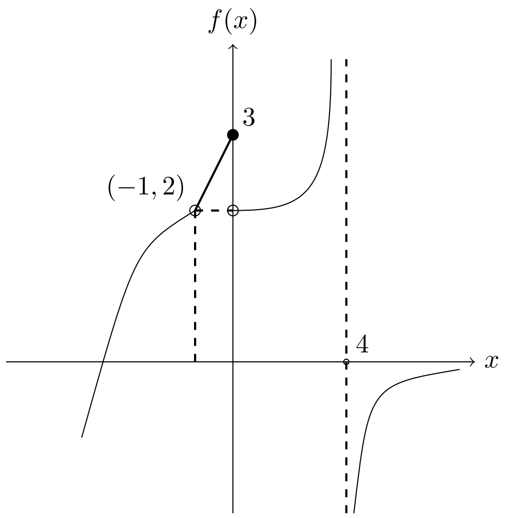
11. Sea la función $f$ definida por el siguiente gráfico:




Calcular:

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
(f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
(g) $\lim_{x\to 2} f(x)$
(h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(i) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
(j) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
(k) $\lim_{x\to -1} f(x)$

12. Sea la función $f$ definida por el siguiente gráfico:




Calcular:

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$
(d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
(f) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$
(g) $\lim_{x\to 4} f(x)$
(h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(i) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
(j) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
(k) $\lim_{x\to -1} f(x)$

**Indeterminación $\frac{0}{0}$**

Polinomios $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ con, $P(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ y $Q(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

entonces: $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$ si $Q(a) \neq 0$

Expresión con radical conjugada $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

**Funciones equivalentes**

$f(x) \to 0$

$$\begin{array}{rcl} e^{f(x)}-1 & \sim & f(x) \\ 1-\cos(f(x)) & \sim & \frac{f^2(x)}{2} \\ a^{f(x)}-1 & \sim & f(x).\ln a \\ (1+f(x))^\alpha - 1 & \sim & \alpha.f(x) \\ \sin(f(x)) & \sim & f(x) \\ \tan(f(x)) & \sim & f(x) \\ \ln(1+f(x)) & \sim & f(x) \end{array}$$

$f(x) \to 1$ y $h(x) \to \infty$

$$\begin{array}{rcl} \ln(f(x)) & \sim & f(x)-1 \\ f(x)^{f(x)}-1 & \sim & f(x)-1 \\ e^{f(x)}-e & \sim & e(f(x)-1) \\ f(x)^\alpha - 1 & \sim & \alpha(f(x)-1) \\ f(x)^{h(x)} & \sim & e^{(f(x)-1).h(x)} \end{array}$$

$f(x) \to a$

$$e^{f(x)}-e^a \sim e^a.(f(x)-a)$$

13. Determinar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-2x+1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{L|x|}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{L(x)}$

(e) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{e^x}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} (2x^3-x^2+6x)e^x$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-2x+1}$

(h) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+3}$

(i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1}$

(j) $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{3x}{x+1} - \frac{3}{x+1}$

(k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x+3}{2x^2+x}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{L(x+1)}{x^2}$

(m) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{sin(x)}$

(o) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x}$

(p) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^4+x}-\sqrt{x^4}$

## Continuidad

14. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $\frac{3x-2}{x+1}$

(b) $\frac{x-3}{x^2-5x+6}$

(c) $e^{\frac{1}{x-1}}$

(d) $\frac{1-x^2}{2x+2}.e^{\frac{1}{x-2}}$

(e) $\frac{5-e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}$

(f) $Ln(\frac{x-1}{3+x})$

15. (a) ¿Cuáles son los puntos dónde la función del ejercicio 11 es continua?
    (b) ¿Cuáles son los puntos dónde la función del ejercicio 12 es continua?

16. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x) = \begin{cases} -x^3+4x & x \leq 1 \\ \frac{x^3-7x+9}{x^4} & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ \frac{5x^2-4x+1}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^3} & x \leq -1 \\ e^x & x > -1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{-4x^5-2x^3+x-7}{x^2+1} & x \leq 0 \\ Ln(x) & x > 0 \end{cases}$

17. Hallar, si es posible, $\alpha, \beta \in \Re$ para que las siguiente funciones sean continuas:

(a) $f(x) = \begin{cases} sin(x) & x \geq 0 \\ cos(x+\alpha) & x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} & x \leq 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{12-x^2}-6 & 0 \leq x < 4 \\ \alpha x + 7 & x \geq 4 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} & x < 1 \\ sin(\frac{\pi x}{2}) & x \geq 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} sin(\pi x) & x < 1 \\ \alpha x + \beta & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x}{|x|} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} |3-x| & x < 7 \\ \alpha x + 4 & 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} Ln(x) & 0 < x < 1 \\ \alpha x^2 + \beta & x \geq 1 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & 0 < x \\ \alpha x + \beta & 0 \leq x \leq 3 \\ x-5 & x > 3 \end{cases}$