Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 1

Primer parcial - 6 de mayo de 2024.

SOLUCIÓN

Respuestas Verdadero o Falso: rellenar con **V** o **F**				
VF1	VF2	VF3	VF4	VF5
V	F	V	F	V

Correcta: 2 puntos. Incorrecta: -1 punto.
Sin responder: 0 puntos.

Respuestas múltiple opción: rellenar con **A**, **B**, **C** o **D**				
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	A	C	D	C

Correcta: 6 puntos. Incorrecta: -1 punto.
Sin responder: 0 puntos.

Verdadero o Falso

1. La cantidad de soluciones de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r, \quad \text{es} \quad \mathrm{C}_r^{n+r-1}$$

con $x_i \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2, ..., n$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Solución: Por lo visto en Teórico, la cantidad de soluciones enteras de la ecuación anterior es: $\mathrm{CR}_r^n = \mathrm{C}_r^{n+r-1}$. Por lo tanto es Verdadero.

2. En el desarrollo de $(x+2y+1)^8$ el coeficiente de x^6y es 56.

Solución: En el desarrollo de $(x+2y+1)^8$ el coeficiente de x^6y aparece así: $\frac{8!}{6!1!1!} \cdot x^6 \cdot (2y)^1 \cdot 1^1 = 56 \cdot x^6 \cdot 2 \cdot y = 112 \cdot x^6 y$, con lo cual el coeficiente buscado es 112. Por lo tanto la afirmación es Falsa.

3. La cantidad de desórdenes de 5 elementos distintos es 44.

Solución: Sabemos que D_n es el entero más próximo al número real $\frac{n!}{e}$. Luego D_5 es el entero más próximo a $\frac{5!}{e} \cong 44,15$. Por lo tanto $\mathrm{D}_5 = 44$, con lo cual la afirmación es verdadera.

Otro camino de solución:

$$\mathrm{D}_5/5! = 1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5!$$

Multiplicando por 5! tenemos:

$$\mathrm{D}_5 = 5! - 5! + 3{,}4{,}5 - 4{,}5 + 5 - 1 = 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

4. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathrm{CR}_n^m = \mathrm{CR}_{m-n}^m$.

Solución: Si fuera cierto para todo $m, n \in \mathbb{N}$, en particular sería cierto para $m = 7$ y $n = 4$. Pero $\mathrm{CR}_4^7 = \mathrm{C}_4^{10} = 210$ en tanto que $\mathrm{CR}_3^7 = \mathrm{C}_3^9 = 84$. Por lo tanto la afirmación es Falsa.

5. $\mathrm{Sob}(7,5) + \mathrm{Sob}(7,6) = \mathrm{Sob}(8,6)/6$.

Solución: Recordemos la fórmula de Stiefel para funciones sobreyectivas (Práctico 5, Ej. 8, (b)):

$$Sob(m+1, n) = n \cdot (Sob(m, n-1) + Sob(m, n)).$$

Luego, tomando $m = 7$ y $n = 6$, vemos que la afirmación es Verdadera.

Múltiple Opción

1. En un ejercicio de un examen se considera analizar la propiedad $2^n \geq n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, utilizando Inducción Completa. Se obtuvieron las siguientes respuestas:

Clodomiro: La propiedad es cierta porque vale para $n = 0$ y el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Duvija: Si bien el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

la propiedad vale sólo para $n \geq 4$, pues falla en $n = 3$.

Begoña: El paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2 \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}, n \neq 2$$

y se verifica que la propiedad vale para $n = 4$. Entonces es cierta para todo $n \geq 4$. Además se puede verificar que también vale para $n = 0, 1$ y 2.

Agrippina: La propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$ porque vale para $n = 0$ y vale el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geq n^2 + 1, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La respuesta correcta la escribió:

A) Agrippina
B) Begoña
C) Clodomiro
D) Duvija

Solución: Empecemos por resolver la desigualdad por IC. Si

$$P(n) = n^2 \leq 2^n,$$

entonces tenemos que: vale $P(0)$; vale $P(1)$; vale $P(2)$, **no vale** $P(3)$, vale $P(4)$, vale $P(5)$, etc.

Pongamos la hipótesis de inducción:

$$(H) \ \ n^2 \leq 2^n;$$

y la tesis de inducción:

$$(T) \ \ (n+1)^2 \leq 2^{n+1}.$$

Tenemos que $(n+1)^2 = (n \cdot (1 + \frac{1}{n}))^2 = n^2 \cdot (1 + \frac{1}{n})^2$. Por otro lado, para todo $n \geq 3$ se tiene que

$$(1 + \frac{1}{n}) \leq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}.$$

Entonces:

$$(1 + \frac{1}{n})^2 < 2, \ \ \forall \ n \geq 3.$$

Con lo cual, para todo $n \geq 3$, se tiene que:

$$(n+1)^2 = n^2 \cdot (1 + \frac{1}{n})^2 < n^2 \cdot 2.$$

Luego, usando la hipótesis de inducción, tenemos que:

$(n+1)^2 < n^2 \cdot 2 < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, para todo $n \geq 3$, lqqd.

Analizando las respuestas tenemos que:
(A) Agrippina, planteó operativamente mal paso inductivo:
(C) Clodomiro erró al decir que el paso inductivo vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Si valiera para todos los naturales, como $P(2)$ es cierta, entonces debiera ser cierta también $P(3)$.
(D) Duvija también erró porque dijo que la desigualdad vale **solo** para $n \geq 4$. Es cierta para todo $n \geq 4$ pero también es cierta para $n = 0$, $n = 1$, y $n = 2$.
La respuesta correcta la dio (B) Begoña.

---

2. La cantidad de palabras de largo 7 con letras de la palabra PALADINES que tienen dos A seguidas o ninguna A es:

A) $4 \cdot 7!$ **B)** $8!$ **C)** $2 \cdot 7!$ **D)** $7!$

Solución: Tenemos dos casos: **(a)** palabras de siete letras con dos Aes seguidas, **(b)** palabras de siete letras sin A. **(a)** Al tomar dos Aes seguidas, usamos dos espacios para esas letras. Luego nos quedan 5 lugares para colocar letras de un vector de 7 letras: PLDINES. Luego tenemos C_5^7 posibles elecciones. Elegidas las 5 letras, tenemos "6 letras" para reordenar: las cinco elegidas y la doble AA (que la vemos como una unidad indisoluble). Por lo tanto tenemos, en este caso: $\mathrm{C}_5^7 \cdot 6! = \frac{7!}{5!}2! \cdot 6! = 7! \cdot 3$.

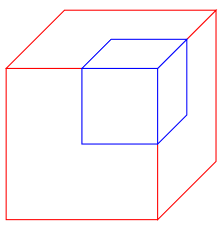
(b) PALADINES tiene 9 letras, al sacar las dos Aes, nos quedan exactamente siete letras. Por lo tanto tenemos: 7! casos.
Entre los casos (a) y (b) sumamos $4 \cdot 7!$ posibles palabras en las condiciones de la letra.

---

3. Sea C un cubo de volumen 8 cm^3 y n el mínimo natural tal que podemos asegurar que si seleccionamos n puntos cualesquiera en C, entonces hay dos entre los seleccionados que están a distancia menor o igual a $\sqrt{3}$ (que es la medida de la diagonal de un cubo de volumen 1 cm^3). Entonces:

A) $n = 7$ **B)** $n = 8$ **C)** $n = 9$ **D)** $n = 10$

Solución: Un cubo de volumen 8 cm^3, o sea un cubo de lado 2cm, tiene dentro ocho cubitos de volumen 1, como muestra la figura:



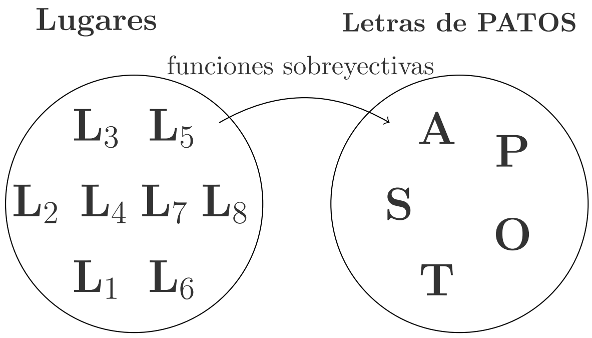
Tomando los 8 vértices del cubo mayor (rojo) podemos ver que $n = 8$ **no** es el mínimo buscado porque la distancia entre vértices del cubo es $2 > \sqrt{3}$. Sin embargo si elegimos 9 puntos en el cubo, para cualquier elección de los mismos, usando el principio del palomar, como hay 8 cubitos azules (cubos de volumen 1), al menos dos puntos coincidirán en un cubito. Como la diagonal de un cubito azul es $\sqrt{3}$, hemos probado que el mínimo buscado es $n = 9$.

---

4. La cantidad de palabras de largo 8 que se pueden formar usando <u>**todas**</u> las letras de la palabra PATOS (se pueden repetir letras) es:

A) A_5^8 **C)** CR_8^5
B) $5^8 - 5 \cdot 4^8$ **D)** $\mathrm{Sob}(8, 5)$

Solución: Aquí tenemos que tener en cuenta que hay que usar **todas** las letras de la palabra PATOS. O sea que en cada palabra de largo 8 habrá con seguridad una P, una A, una T, una O, y una S, y luego tres letras más que son repeticiones de algunas de las anteriores.



Luego hay $\mathrm{Sob}(8, 5)$ palabras posibles usando todas las letras de PATOS.

---

5. Tenemos catorce pelotitas numeradas del 1 al 14, dos de las cuales son de color blanco y doce son de color celeste. Queremos distribuirlas en seis montones, no vacíos y de forma que en cada montón no haya pelotitas de distinto color (se entiende que los montones son recipientes indistinguibles). ¿De cuántas formas se las puede distribuir?

A) $A_1^6 \cdot S(12, 5) + A_2^6 \cdot S(12, 4)$
B) $C_1^6 \cdot S(12, 5) + C_2^6 \cdot S(12, 4)$
C) $S(12, 5) + S(12, 4)$
D) $\mathrm{Sob}(12, 5) + \mathrm{Sob}(12, 4)$

Solución: Obsérvese que las pelotitas, al estar numeradas, son elementos *distinguibles*. Por su parte los seis montones no son distinguibles entre sí. El hecho de que todos los montones queden no vacíos, nos lleva a pensar en los números $\mathrm{Sob}(m, n)$, pero como los montones, que serían los elementos del codominio son indistinguibles, entonces el modelo correcto es $\mathrm{S}(m, n)$, números de Stirling de segunda especie. Al considerar que no hayan pelotitas de diferente color en un mismo montón, surgen dos casos: (a) las dos blancas están juntas en el mismo montón, o bien, (b) hay dos montones que tienen una pelotita bllanca cada uno. En el caso (a) dos pelotitas blancas forman un montón, en cuanto las otras doce pelotitas celestes se distribuyen en cinco montones de $\mathrm{S}(12, 5)$ formas posibles. En el caso (b) hay dos montones con una pelotita blanca en cada uno. Las otras doce pelotitas celestes se distribuyen en los cuatro montones restantes de $\mathrm{S}(12, 4)$ formas posibles. En total tenemos: $\mathrm{S}(12, 5) + \mathrm{S}(12, 4)$ formas de distribuir esas pelotitas con las condiciones del problema.
