# Primer Parcial - Topología y Análisis Real

Sábado 11 de mayo de 2024 (14:00 - 18:00)

| **John Doe** | **0.000.000-0** | **J. D.** |
| --- | --- | --- |
| Nombre y Apellido | Cédula de Identidad | Firma |

## Pregunta 1

Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subconjunto propio de $M$ (es decir, $X \neq \emptyset$ y $X \neq M$). Se define la función indicatriz $\xi_X : M \to \mathbb{R}$ de $X$ como

$$\xi_X(a) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in X, \\ 0 & \text{si } a \notin X. \end{cases}$$

Demuestre que $\partial X$ (la frontera de $X$ en $M$) coincide con el conjunto de puntos de $M$ donde $\xi_X$ es discontinua. (Al conjunto $\mathbb{R}$ se lo considera con la métrica usual inducida por la norma del valor absoluto).

(7 puntos)

**Solución:** Llamemos $\mathcal{D} = \{a \in M \ / \ \xi_X \text{ es discontinua en } a\}$. Veamos que $\partial X = \mathcal{D}$.

($\subseteq$) Sea $a \in \partial X$. Entonces, para cada $r > 0$ se tiene que

$$B(a, r) \cap X \neq \emptyset \ \text{ y } \ B(a, r) \cap (M - X) \neq \emptyset.$$

Queremos ver que $\xi_X$ es discontinua en $a$, es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, se puede encontrar un $x \in B(a, \delta)$ con $|\xi_X(x) - \xi_X(a)| \geq \epsilon$. Note que la expresión $|\xi_X(x) - \xi_X(a)|$ solamente puede valer 0 o 1, por lo cual conviene tomar $\varepsilon = 1/2$. Hacemos ahora un análisis por casos:

- $a \in X$: Considere $\delta > 0$. Como $a \in \partial X$, tenemos que

  $$B(a, \delta) \cap X \neq \emptyset \ \text{ y } \ B(a, \delta) \cap (M - X) \neq \emptyset.$$

  En particular, como $a \in X$ y $B(a, \delta) \cap (M - X) \neq \emptyset$, podemos tomar $x \in B(a, \delta)$ y fuera de $X$. Para tal $x$, se tiene entonces que

  $$|\xi_X(x) - \xi_X(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} \ (= \varepsilon).$$

- $a \notin X$: Análogo al caso anterior.

($\supseteq$) Sea $a \in \mathcal{D}$, es decir, $\xi_X$ es discontinua en $a$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, se puede encontrar un $x \in B(a, \delta)$ con $|\xi_X(x) - \xi_X(a)| \geq \epsilon$. De nuevo, hacemos un análisis por casos:

- $a \in X$: Considere $r > 0$. Entonces, como $a \in X$, se tiene que

$$B(a, r) \cap X \neq \emptyset.$$

Por otro lado, como $a \in \mathcal{D}$, para tal $r > 0$ existe $x \in B(a, r)$ con

$$|\xi_X(x) - 1| = |\xi_X(x) - \xi_X(a)| \geq \epsilon.$$

Luego, como $\varepsilon > 0$, no puede ocurrir que $\xi_X(x) = 1$. Por lo cual, $\xi_X(x) = 0$, es decir, $x \notin X$, y así

$$B(a, r) \cap (M - X) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $a \in \partial X$.

- $a \notin X$: Análogo al caso anterior.

## Pregunta 2

(a) Sean $d_1$ y $d_2$ métricas sobre un mismo conjunto $M$. Demuestre que $d_1$ y $d_2$ son equivalentes si, y solamente si, la función identidad $\mathrm{id}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ es un homeomorfismo.

(3 puntos)

**Solución:** Para ver que $\mathrm{id}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ es un homeomorfismo, por ser claramente una función biyectiva, bastaría con demostrar que es una aplicación abierta, es decir, que $\mathrm{id}(U) \in \tau_{d_2}$ para todo $U \in \tau_{d_1}$, donde $\tau_{d_1}$ y $\tau_{d_2}$ denotan las topologías métricas inducidas por $d_1$ y $d_2$, respectivamente. Como $d_1$ y $d_2$ son equivalentes, se tiene que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. Luego, se tiene claramente que $\mathrm{id}(U) \in \tau_{d_2}$ para todo $U \in \tau_{d_1}$, por lo cual $\mathrm{id}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ es un homeomorfismo.

(b) Sea $(M, d_1)$ un espacio métrico y $f\colon M \to M$ una función biyectiva. Demuestre que la función $d_2\colon M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_2(x, y) := d_1(f(x), f(y)) \qquad \text{para todo } x, y \in M$$

es una métrica sobre $M$. Concluya que $f\colon (M, d_2) \to (M, d_1)$ es un homeomorfismo.

(3 puntos)

**Solución:** Verifiquemos las condiciones de la definición de métrica para $d_2$:

- Sean $x, y \in M$. Como $d_1$ es una métrica sobre $M$, se tiene que $d_1(f(x), f(y)) \geq 0$. Entonces, $d_2(x, y) = d_1(f(x), f(y)) \geq 0$.
- Sea $x \in M$. Como $d_1$ es una métrica, se tiene que $d_2(x, x) = d_1(f(x), f(x)) = 0$. Ahora, supongamos que $x$ e $y$ son puntos de $M$ tales que $d_2(x, y) = 0$. Luego, $d_1(f(x), f(y)) = 0$, y como $d_1$ es una métrica, se tiene que $f(x) = f(y)$. Al ser $f$ biyectiva, concluimos que $x = y$.
- Sean $x, y \in M$. Como $d_1$ satisface la propiedad de simetría, se tiene que
$$d_1(f(x), f(y)) = d_1(f(y), f(x)),$$
es decir, $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.
- Sean $x, y, z \in M$. Como $d_1$ satisface la desigualdad triangular, se tiene que
$$d_1(f(x), f(y)) \leq d_1(f(x), f(z)) + d_1(f(z), f(y)).$$
Es decir, $d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$.

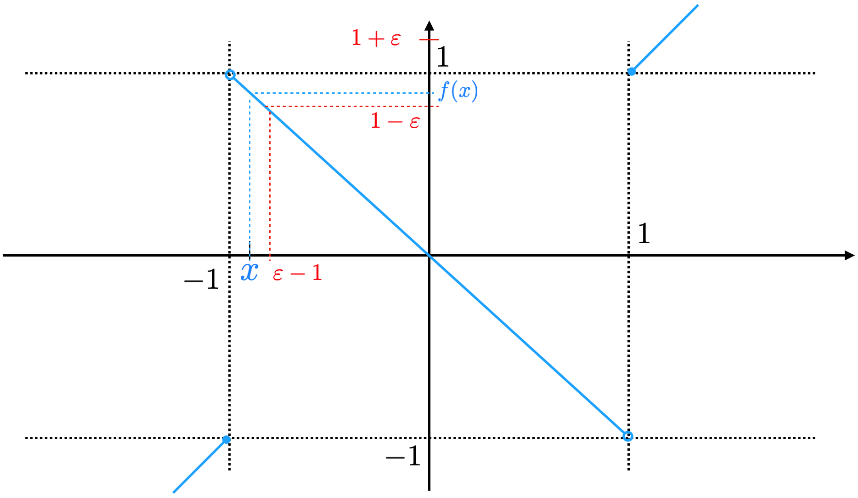
Verificadas todas las condiciones anteriores, tenemos que $d_2$ es una métrica sobre $M$. Para la última afirmación, sea $x \in M$ arbitrario y veamos que $f$ es continua en $x$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $d_2(x, y) < \delta$ entonces $d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como $d_2(x, y) = d_1(f(x), f(y))$, basta con tomar $\delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $f$ es continua en $a \in M$, y al ser $a$ arbitrario, se tiene que $f\colon (M, d_2) \to (M, d_1)$ es continua. Para probar que $f^{-1}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ es continua, basta con notar que $d_1(x, y) = d_2(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ para todo $x, y \in M$, y repetir el procedimiento anterior. Por lo tanto, $f\colon (M, d_2) \to (M, d_1)$ es un homeomorfismo.

(c) Sea $M = \mathbb{R}$, $d_1$ la métrica usual, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la biyección dada por
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } |x| < 1, \\ x & \text{si } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1, \end{cases}$$
y $d_2$ la métrica inducida por $f$ según la parte (b). Demuestre que toda bola de centro 1 en $(\mathbb{R}, d_2)$ contiene puntos negativos. Concluya que $d_1$ y $d_2$ no son métricas equivalentes.

(3 puntos)

**Solución:** Considere $B_{d_2}(1, \varepsilon)$ una bola arbitraria de centro 1 y radio $\varepsilon$, según la métrica $d_2$, es decir,
$$B_{d_2}(1, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; d_2(x, 1) < \varepsilon\}.$$
Si $\varepsilon \geq 1$, entonces $x = -1/2 \in B_{d_2}(1, \varepsilon)$. En efecto,
$$d_2(-1/2, 1) = d_1(f(-1/2), f(1)) = d_1(1/2, 1) = |1/2 - 1| = 1/2 < \varepsilon.$$
Por lo tanto, en este caso $B_{d_2}(1, \varepsilon)$ contiene puntos negativos.

Supongamos ahora que $0 < \varepsilon < 1$ y sea $x \in B_{d_2}(1, \varepsilon)$. Luego $|f(x) - 1| < \varepsilon$, por lo cual $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. En particular, podemos quedarnos con los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1)$. Dentro de esta parte de la imagen de $f$, como $0 < \varepsilon < 1$, se tiene que $f(x) = -x$. Así, $-x \in (1 - \varepsilon, 1)$, por lo cual $x \in (-1, \varepsilon - 1)$. Finalmente, como $\varepsilon - 1 < 0$, se tiene que $x < 0$ y $x \in B_{d_2}(1, \varepsilon)$.




Para la última afirmación, supongamos que $d_1$ y $d_2$ son equivalentes, y considere la bola $B_{d_1}(1, 1/2) = (1/2, 3/2)$ (que no contiene puntos negativos). Como $d_1$ y $d_2$ son equivalentes, existe $r > 0$ tal que $B_{d_2}(1, r) \subseteq B_{d_1}(1, 1/2) = (1/2, 3/2)$. Por otro lado, al tener $B_{d_2}(1, r)$ puntos negativos, se tiene que $(1/2, 3/2)$ también, lo cual es una contradicción.

## Pregunta 3

Sea $(M, d)$ un espacio métrico.

(a) Dada $f\colon (M, d) \to (N, \rho)$ una función continua, donde $(N, \rho)$ es otro espacio métrico, demuestre que si $M$ es conexo, entonces $f(M)$ es conexo.

`(4 puntos)`

**Solución:** Trabajemos primero el caso $f(M) = N$ (es decir, $f$ es sobreyectiva). Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $N$, es decir, $V_1, V_2 \in \tau_\rho$ tales que

$$V_1 \cup V_2 = N \ \text{ y } \ V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Luego, por propiedades de la imagen inversa, se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) &= f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(N) = M, \ \text{ y} \\ f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) &= f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $f$ es continua, se tiene además que $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2) \in \tau_d$. Entonces, $\{f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)\}$ es una partición de $M$. Al ser $M$ conexo, tal partición debe ser la trivial, es decir, $f^{-1}(V_1) = M$ y $f^{-1}(V_2) = \emptyset$. Luego, por ser $f$ sobreyectiva, se tiene que

$$N = f(M) = f(f^{-1}(V_1)) = V_1 \ \text{ y } \ \emptyset = f(\emptyset) = f(f^{-1}(V_2)) = V_2,$$

es decir, $\{V_1, V_2\}$ es la partición trivial. Por lo tanto, $N$ es conexo.

Para el caso en el cual $f$ no es sobreyectiva, basta con aplicar el razonamiento anterior a la función $\hat{f}\colon (M,d) \to (f(M), \rho')$, donde $\hat{f}$ es la restricción de $f$ sobre su imagen y $\rho'$ es la restricción de $\rho$ a $f(M)$. Note que $\hat{f}\colon (M,d) \to (f(M), \rho')$ es continua por ser $f$ continua. En efecto, si $V \in \tau_{\rho'}$, entonces $V = V' \cap f(M)$ donde $V' \in \tau_\rho$. Luego,

$$\hat{f}^{-1}(V) = \hat{f}^{-1}(V' \cap f(M)) = \hat{f}^{-1}(V') \cap \hat{f}^{-1}(f(M)) = f^{-1}(V') \cap M = f^{-1}(V') \in \tau_d.$$

(b) Demuestre que si $(M,d)$ es conexo por arcos, entonces $(M,d)$ es conexo.

`(4 puntos)`

**Solución:** Sea $x_0 \in M$ un punto fijo. Para cada $x \in M$, como $M$ es conexo por arcos, se tiene que existe un camino de $x_0$ a $x$, es decir, una función continua $\sigma_x\colon [0,1] \to M$ tal que $\sigma_x(0) = x_0$ y $\sigma_x(1) = x$. Al ser $[0,1]$ un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ (por ser un intervalo) y $\sigma_x$ continua, se tiene por la parte (a) que $\sigma_x([0,1])$ es un subconjunto conexo de $M$. Por otro lado,

$$M = \bigcup_{x \in M} \sigma_x([0,1]) \ \text{ y } \ x_0 \in \bigcap_{x \in M} \sigma_x([0,1]).$$

Tenemos entonces que $M$ es la unión de subconjuntos conexos de $M$ que tienen un punto en común, y por un resultado visto en clase, tal unión debe ser conexa. Por lo tanto, $M$ es conexo.

## Pregunta 4

Sea $(M,d)$ un espacio métrico y $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ el espacio de las sucesiones acotadas en $M$ con la métrica $d_\infty$ de convergencia uniforme, es decir, dadas dos sucesiones acotadas $(x_n)$ e $(y_n)$ en $M$, se define

$$d_\infty((x_n),(y_n)) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\, d(x_n, y_n) \,\}.$$

Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$:

$$\mathcal{C} = \{(x_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, M) \ / \ (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy}\},$$
$$\mathcal{C}_0 = \{(x_y) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, M) \ / \ (x_n) \text{ es una sucesión convergente}\}.$$

(a) Demuestre que $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$.

(3 puntos)

**Solución:** Sabemos que $\mathcal{C}$ es cerrado si, y solamente si, $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$. Demostraremos que si $(x_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ es un punto de adherencia de $\mathcal{C}$, entonces $(x_n) \in \mathcal{C}$ (es decir, $(x_n)$ tendrá que ser una sucesión de Cauchy). Dado $\varepsilon > 0$, debemos entonces hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Para $\varepsilon/3$, como $(x_n)$ es un punto de adherencia de $\mathcal{C}$, se tiene que

$$B((x_n), \varepsilon/3) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

Sea entonces $(y_n) \in B((x_n), \varepsilon/3) \cap \mathcal{C}$. Luego,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ \, d(y_n, x_n) \, \} = d_\infty((y_n), (x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De lo anterior se tiene que

$$d(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como $(y_n)$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nos quedamos entonces con el $N$ anterior, y suponemos que $m, n \geq N$. Usando la desigualdad triangular para la métrica $d$, se tiene entonces que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) + d(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy.

(b) Demuestre que la función $\varphi \colon \mathcal{C}_0 \to M$ dada por

$$\varphi((x_n)) = \lim x_n$$

es continua, donde $\lim x_n$ es el punto de $M$ al cual $(x_n)$ converge. (Al conjunto $\mathcal{C}_0$ se lo considera con la métrica $d_\infty$ de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ restringida a $\mathcal{C}_0$).

(3 puntos)

**Solución:** Sea $(x_n) \in \mathcal{C}_0$ arbitrario. Veamos que $\varphi$ es continua en $(x_n)$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $d_\infty((y_n), (x_n)) < \delta$ para todo $(y_n) \in \mathcal{C}_0$, entonces $d(\varphi((y_n)), \varphi((x_n))) < \varepsilon$.

Para tal $\varepsilon$, tomamos $\delta = \varepsilon/3$. Supongamos que $(y_n) \in \mathcal{C}_0$ cumple con $d_\infty((y_n), (x_n)) < \delta$. Esto implica que

$$d(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, sea $a = \lim x_n$ y $b = \lim y_n$ (es decir, $a = \varphi((x_n))$ y $b = \varphi((y_n))$). Como $x_n \to a$ e $y_n \to b$, se tiene que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad n \geq N_2 \Longrightarrow d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene entonces que

$$d(x_N, a) < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; d(y_N, b) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad d(y_N, x_N) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la desigualdad triangular para $d$, tenemos que

$$d(a, b) \leq d(a, x_N) + d(x_N, y_N) + d(y_N, b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Entonces, $d(\varphi((x_n)), \varphi((y_n))) < \varepsilon$ si $d_\infty((x_n), (y_n)) < \delta$ con $(y_n) \in \mathcal{C}_0$. Por lo tanto, $\varphi$ es continua en $(x_n)$.