Primer Parcial - Topología y Análisis Real

Sábado 11 de mayo de 2024 (14:00 - 18:00)

Nombre y Apellido	Cédula de Identidad	Firma

Pregunta 1

Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subconjunto propio de M (es decir, $X \neq \emptyset$ y $X \neq M$). Se define la función indicatriz $\xi_X \colon M \to \mathbb{R}$ de X como

$$\xi_X(a) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in X, \\ 0 & \text{si } a \notin X. \end{cases}$$

Demuestre que ∂X (la frontera de X en M) coincide con el conjunto de puntos de M donde ξ_X es discontinua. (Al conjunto $\mathbb{R}$ se lo considera con la métrica usual inducida por la norma del valor absoluto).

(7 puntos)

Pregunta 2

(a) Sean d_1 y d_2 métricas sobre un mismo conjunto M. Demuestre que d_1 y d_2 son equivalentes si, y solamente si, la función identidad $\mathrm{id} \colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ es un homeomorfismo.

(3 puntos)

(b) Sea (M, d_1) un espacio métrico y $f \colon M \to M$ una función biyectiva. Demuestre que la función $d_2 \colon M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_2(x, y) := d_1(f(x), f(y)) \qquad \text{para todo } x, y \in M$$

es una métrica sobre M. Concluya que $f \colon (M, d_2) \to (M, d_1)$ es un homeomorfismo.

(3 puntos)

(c) Sea $M = \mathbb{R}$, d_1 la métrica usual, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la biyección dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } |x| < 1, \\ x & \text{si } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1, \end{cases}$$

y d_2 la métrica inducida por f según la parte (b). Demuestre que toda bola de centro 1 en $(\mathbb{R}, d_2)$ contiene puntos negativos. Concluya que d_1 y d_2 no son métricas equivalentes.

(3 puntos)

Pregunta 3

Sea (M, d) un espacio métrico.

(a) Dada $f\colon (M, d) \to (N, \rho)$ una función continua, donde (N, ρ) es otro espacio métrico, demuestre que si M es conexo, entonces $f(M)$ es conexo.

(4 puntos)

(b) Demuestre que si (M, d) es conexo por arcos, entonces (M, d) es conexo.

(4 puntos)

Pregunta 4

Sea (M, d) un espacio métrico y $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ el espacio de las sucesiones acotadas en M con la métrica d_∞ de convergencia uniforme, es decir, dadas dos sucesiones acotadas (x_n) e (y_n) en M, se define

$$d_\infty((x_n), (y_n)) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ \, d(x_n, y_n) \, \}.$$

Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$:

$$\mathcal{C} = \{(x_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, M) \ / \ (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy}\},$$
$$\mathcal{C}_0 = \{(x_y) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, M) \ / \ (x_n) \text{ es una sucesión convergente}\}.$$

(a) Demuestre que $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$.

(3 puntos)

(b) Demuestre que la función $\varphi\colon \mathcal{C}_0 \to M$ dada por

$$\varphi((x_n)) = \lim x_n$$

es continua, donde $\lim x_n$ es el punto de M al cual (x_n) converge. (Al conjunto $\mathcal{C}_0$ se lo considera con la métrica d_∞ de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ restringida a $\mathcal{C}_0$).

(3 puntos)

Puntajes (para uso exclusivo del docente)			
Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4