Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 2
Primer semestre 2024

PRÁCTICO 7: Teoría de Grupos - conceptos básicos.

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos, investigar si el conjunto y la operación forman un grupo.

a. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el producto usual de matrices: $A * B = AB$.

b. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con la operación: $A * B = AB + BA$.

c. El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_1 + y_2)$.

d. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ con el producto usual de matrices.

e. El conjunto $\{a, b, c\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

f. El conjunto $\{a, b, c, d\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	b
d	d	a	b	c

.

g. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación $\otimes$ definida por: $a \otimes b = ab - 2(a + b) + 6$.

Ejercicio 2. Completar la tabla de Cayley de cada grupo $(G, \cdot)$.

a. $G = \{e, a, b, c, d\}$ con tabla de Cayley parcial:

·	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a				
b	b				c
c	c	d			e
d	d				

b. $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ con tabla de Cayley parcial:

·	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a		e			
b	b			f		d
c	c				b	a
d	d					b
f	f			b		

Ejercicio 3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \ \forall\, a, b \in G$.

b. $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n, \ \forall\, a \in G,\ n \in \mathbb{N}$.

c. Si $gh = e$ o $hg = e$, entonces $h = g^{-1}$.

d. Si $(ab)^3 = e$ entonces $(ba)^3 = e$.

e. Si $xg = xh$ o $gx = hx$, para algún $x \in G$, entonces $g = h$.

Subgrupos

Ejercicio 4. Para cada uno de los grupos G, investigar si H es un subgrupo de G:

a. $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $H = n\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros múltiplos de n (para $n \in \mathbb{Z}$ dado).

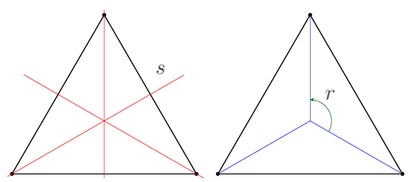
b. $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ con el producto y $H = \mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos.

c. $G = GL_2(\mathbb{R})$ (matrices invertibles 2×2 con coeficientes reales) con el producto usual de matrices y $H = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : ac \neq 0\right\}$.

d. $G = GL_2(\mathbb{R})$ y $H = \{M \in G : \det(M) = 1\}$.

e. $G = \mathbb{Q}^+$ con el producto y $H = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \equiv 0 \pmod 7,\ \operatorname{mcd}(b, 7) = 1\right\}$.

f. $G = D_3 = \{\mathrm{id}, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, el grupo dihedral de un triángulo equilatero, y $H = \{\mathrm{id}, r, r^2 s, s\}$.



g. $G = S_3$ el grupo de permutaciones de 3 elementos, y $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Ejercicio 5. Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de un grupo G.

a. Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

b. Sean $H_1 = 2\mathbb{Z}$ y $H_2 = 3\mathbb{Z}$, dos subgrupos de $G = \mathbb{Z}$. Probar que $H_1 \cup H_2$ no es un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Este ejemplo muestra que la unión de subgrupos no siempre es un subgrupo.

c. Probar que si $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G, entonces $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

Grupos conmutativos (abelianos)

Ejercicio 6. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1},\ \forall\ a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano. **b**. $(ab)^2 = a^2 b^2,\ \forall\ a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano.

Ejercicio 7. Sea G un grupo abeliano. Probar que H es un subgrupo de G para los siguientes casos:

a. $H = \{a \in G : a^2 = e_G\}$. **b**. $H = \{a^n : a \in G\}$ con n un entero positivo dado.

Ejercicio 8. Sea G un grupo con neutro e. Supongamos que existen elementos $a, b \in G$, tales que: $a \neq e$, $b \neq e$, $a^7 = e$, $b^3 = e$ y $ab = ba^2$. Probar que:

a. G no es conmutativo. **b**. $(ab)^2 = b^2 a^6$. **c**. $(ab)^3 = e$.