Derivadas

Cálculo diferencial e integral en una variable

1. Introducción

El concepto de *derivada* es central en este curso, y evoca inmediatamente la idea física de *velocidad*. Aparece constantemente en las ciencias naturales y sociales, asociado a la idea de variación o cambio. Sin embargo, la noción de derivada es relativamente reciente en términos históricos: es debida a Newton y Leibniz, quienes la formularon en el siglo XVII.

¿Por qué la derivada es tan tardía? Porque recoge ideas y técnicas que se elaboraron a lo largo de mucho tiempo y que tienen diversos orígenes. En el Renacimiento, los europeos se familiarizaron nuevamente con la matemática de los antiguos griegos –que fueron, ante todo, grandes geómetras–, y aprendieron el álgebra que se había desarrollado en el mundo islámico mientras Europa estaba en el medioevo. Estas dos ramas de la matemática –el álgebra y la geometría– confluyeron en la década de 1630 en la *geometría analítica*, inventada independientemente por Pierre de Fermat y René Descartes, que permitió expresar objetos geométricos (tales como curvas, superficies, regiones, trayectorias) mediante ecuaciones algebraicas. Esto abrió la posibilidad de explorar problemas geométricos mediante cálculo simbólico.

La derivada fue usada por diversos matemáticos para resolver problemas geométricos antes de ser bien comprendida, y antes de ser definida como la conocemos hoy. Esto es común al desarrollo de muchos conceptos matemáticos. Fermat, tratando de encontrar máximos y mínimos de funciones, observó que éstos se dan en puntos en los cuales la tangente a la gráfica es horizontal. Las ideas de Fermat fueron retomadas por varios matemáticos[1] que querían, más generalmente, encontrar la recta tangente a una curva en un punto cualquiera. Isaac Barrow, maestro de Newton, se dio cuenta de que las tangentes a una curva estaban relacionadas con el área encerrada por ésta. Este intenso trabajo generó un conjunto de métodos analíticos que permitían resolver diversos problemas geométricos.

Newton y Leibniz, en forma independiente, comprendieron que todos estos métodos tenían una idea subyacente común, y así descubrieron la *derivada*. Además, formularon una nueva teoría que englobaba mucha matemática existente bajo dos conceptos centrales: el de *derivada* y el de *integral*. Como ya había intuido Barrow, estos conceptos, lejos de ser independientes, son en cierto modo

[1] Entre ellos Johann Hudde, René Descartes, John Wallis, Isaac Barrow, René Sluse y Christian Huygens.

"duales", como dos caras de una misma moneda. Expresaron esta idea en lo que hoy conocemos como el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que demostraron con argumentos rigurosos. Es por todo esto que consideramos a Newton y a Leibniz los creadores del Cálculo Diferencial e Integral.

Así, por increíble que parezca y en contra de lo que indica el sentido común, la noción de derivada no fue principalmente motivada por la mecánica clásica. Hasta el siglo XVII la *velocidad* había sido ampliamente estudiada por numerosos y destacados físicos desde tiempos de Aristóteles, y notoriamente por Galileo Galilei. Sin embargo, fue Newton[2] quien unificó las leyes de la mecánica clásica y expresó esta última en términos del cálculo, haciendo del cálculo diferencial e integral y la mecánica clásica dos disciplinas inseparables. Nuestra comprensión del cálculo está sin duda muy influida por esta síntesis.

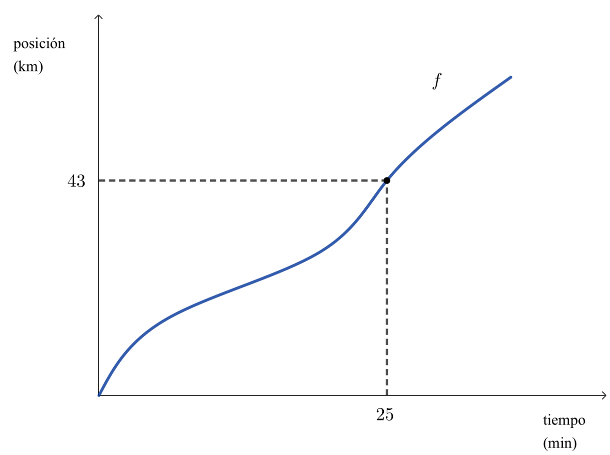
Dedicaremos esta segunda mitad del curso a entender la derivada, y su íntima y fascinante relación con la integral.

2. Definición de la derivada

2.1. Velocidad

Pensemos en un *movimiento unidimensional*. Un movimiento unidimensional es un movimiento que podemos pensar, a los efectos de modelarlo matemáticamente, que ocurre en una dimensión.

Un ejemplo es el de un automóvil que circula a lo largo de una carretera recta. Si designamos el tiempo con la variable t, la posición en la carretera es una función de t, que llamaremos $f(t)$. La siguiente gráfica mide el tiempo en minutos y la posición en kilómetros, y nos dice que, por ejemplo, el auto está en el kilómetro 43 a los 25 minutos de haber partido.



[2] En su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), publicada en 1687.

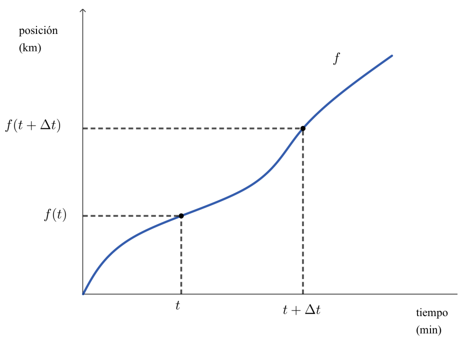
¿Es importante que la carretera sea recta? No, para nada. Si la carretera no es recta, miramos la misma gráfica y constatamos que ésta describe perfectamente el movimiento. Los kilómetros se miden a lo largo de la carretera, y decir que a los 25 minutos de haber salido el auto está en el kilómetro 43 tiene perfecto sentido.

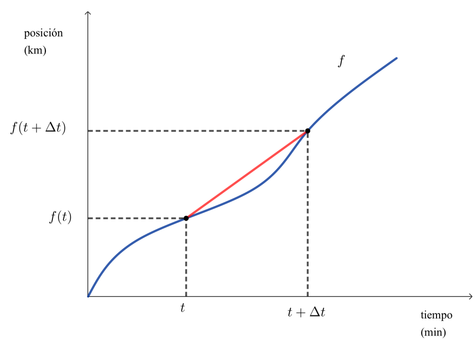
Así, un movimiento unidimensional puede ser, por ejemplo, el de un auto en una carretera, el de una corredora en la rambla de Montevideo, el de un carrito en su riel de la montaña rusa, o el de una manzana que cae verticalmente desde la rama de un árbol. Todos ellos pueden ser modelados por la función $f(t)$.

Volvamos al auto de la gráfica. ¿Cuál es su velocidad media entre los momentos t y $t + \Delta t$? Para calcularla, tenemos que dividir la distancia recorrida $(f(t + \Delta t) - f(t))$ entre el tiempo transcurrido (Δt), es decir,

$$v_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\ km/min.$$

Observemos en la figura que la velocidad media es la pendiente del segmento rojo.





Para calcular la velocidad instantánea en t, tenemos que calcular la velocidad media en lapsos $[t, t + \Delta t]$ cada vez más cortos. En realidad, la velocidad instantánea en el momento t es un límite:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\ km/min. \tag{1}$$

2.2. Pendiente de la recta tangente

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, cuya gráfica se muestra en la figura. Consideremos el siguiente problema geométrico: dado un punto $x_0 \in [a, b]$, ¿cuál es la recta tangente al correspondiente punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$?

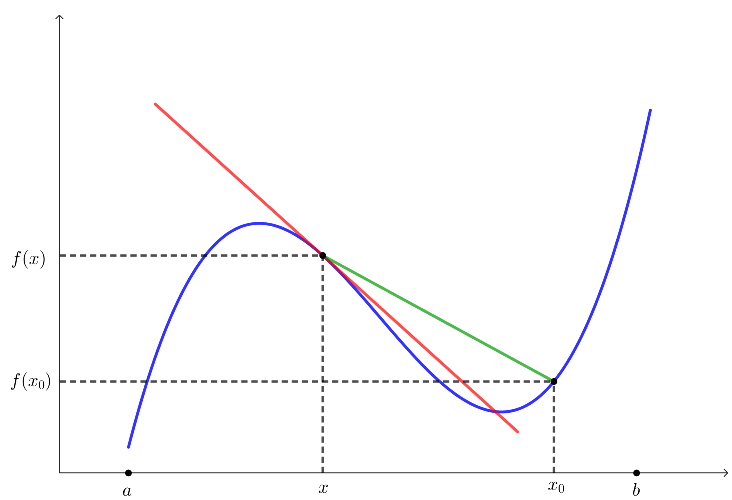
Para determinar una recta en el plano, alcanza con saber su pendiente y un punto por el que pasa. En nuestro caso, ya tenemos el punto, $(x_0, f(x_0))$, y vamos a determinar la pendiente.

Si tomamos un punto $x \in [a, b]$ cercano a x_0, el segmento que une $(x, f(x))$ y $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente[3]

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente, tenemos que hacer que x esté cada vez más cerca de x_0. Es decir, la pendiente de la tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ es el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$



Este límite podría no existir, como no existe en el caso de la siguiente figura. Pero, *si el límite existe*, es la pendiente de la recta tangente.

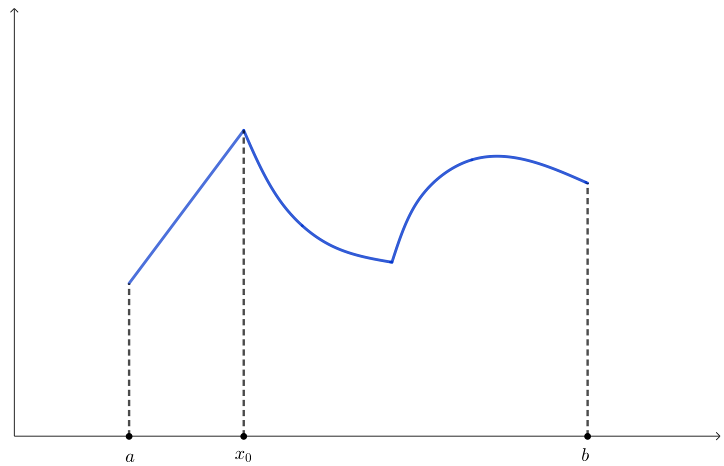
Haremos un cambio de variable para expresar el límite (2) de un modo ligeramente distinto. Escribimos

$$x = x_0 + h,$$

es decir, llamamos h a la diferencia $x - x_0$. Entonces, decir que $x \to x_0$ equivale a decir que $h \to 0$. El límite (2) queda así:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

[3]Recordemos que si en una recta tenemos dos puntos $p_0 = (x_0, y_0)$ y $p_1 = (x_1, y_1)$, la pendiente de la misma es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.



Para esta función, no existe la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$.

2.3. Límite del cociente incremental

Observemos los límites dados por las ecuaciones (1) y (3). Las variables que aparecen en ellos tienen nombres distintos, pero por lo demás, *son iguales*.

En general, si tenemos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, decimos que el *cociente incremental* de f en un punto $x \in I$ es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4}$$

Definición 1. *La derivada de f en el punto x es el límite*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cuando este límite existe y es finito, decimos que f *es derivable en* x. En caso contrario[4], decimos que f no es derivable en x.

Decimos que una función f es *derivable* si es derivable en todos los puntos de su dominio.

Veremos más adelante resultados que nos van a permitir calcular fácilmente las derivadas de "funciones dadas por fórmulas". Por "funciones dadas por fórmulas"nos referimos a funciones que se pueden obtener haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Sin embargo, siempre hay que recordar que *la derivada es, por definición, el límite del cociente incremental*. Esta definición es aplicable a una clase más grande de funciones, y será usada constantemente en lo que resta del curso.

[4]Es decir, si el límite es infinito o no existe.

Como ya dijimos, la derivada de f en un punto x_0 es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. ¿Cómo hallamos la ecuación de esta recta?

Una recta en el plano (a menos que sea vertical) tiene ecuación

$$y = mx + n,$$

donde m es la pendiente. Entonces, la tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ será una recta de ecuación

$$y = f'(x_0)x + n,$$

para algún $n \in \mathbb{R}$ que tenemos que determinar. Como esta recta pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, debe cumplirse que

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + n,$$

por lo que despejando n obtenemos

$$n = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Resumimos estos cálculos en el siguiente recuadro:

Si f es derivable en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta de ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2.4. Continuidad de las funciones derivables

Terminaremos esta sección con una propiedad importantísima de las funciones derivables: son continuas. Más concretamente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, x un punto interior a I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, si f es derivable en x, es continua en x.*

Demostración: Para probar que f es continua en x, tenemos que ver que

$$\lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x),$$

o equivalentemente que

$$\lim_{h\to 0} f(x + h) - f(x) = 0.$$

Observemos que como f es derivable en x, existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y por lo tanto la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es acotada para h en un entorno reducido de 0.

Entonces

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{acotado}} \underbrace{h}_{\text{tiende a 0}} = 0. \ \square$$

Observación 1. *Podría ocurrir que exista*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Diremos que es la derivada en x por la derecha. Con el mismo argumento que demuestra la Proposición 1, si existe la derivada por la derecha de f en x entonces f es continua a derecha en x. Del mismo modo se define derivada por la izquierda.

Cuando el dominio de f es un intervalo cerrado $[a,b]$, podemos hablar de la derivada en a por la derecha y de la derivada en b por la izquierda.

3. Cálculo de derivadas

3.1. Primeros ejemplos

Calculemos, a partir de la definición, la derivada de algunas funciones sencillas.

Ejemplo 1. *Derivada de la función constante*

Tomemos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$. Calcularemos la derivada en un punto x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \ = \ 0 \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. *Derivada de la función identidad*

Tomemos la función identidad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, la función dada por $f(x) = x$.

Su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. *Derivada de la función cuadrática*

Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.
Su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Ejemplo 4. *Derivada de la función potencial*

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 1, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$. Calcularemos su derivada en un punto x.

Para esto, recordemos antes la fórmula del binomio de Newton, que dice que para dos números reales a y b

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k^n a^k b^{n-k},$$

donde c_k^n es el número combinatorio $c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} c_k^n x^k h^{n-k} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k \frac{h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k h^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k \lim_{h\to 0} h^{n-k-1} \\ &= c_{n-1}^n x^{n-1} \;=\; n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto coincide con lo que nos dio el cálculo para $n = 1$ y $n = 2$[5].

Ejemplo 5. *Derivada de la función logaritmo en 1.*

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(x)$. Calcularemos $f'(1)$, es decir,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{log(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{1}{t}\, dt.$$

Consideremos primero el caso en que $h > 0$. Tomando la partición $P = \{1, 1+h\}$, tenemos que las sumas inferior y superior para la integral $\int_1^{1+h} \frac{1}{t}\, dt$ son, respectivamente, $S_*(f,P) = \frac{h}{1+h}$ y $S^*(f,P) = h$, por lo que

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{\log(1+h)}{h} \leq 1.$$

Por el teorema del sandwich, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$. Haciendo un razonamiento análogo para $h < 0$ se llega a que $\lim_{h\to 0^-} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$, por lo que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1.$$

Ejercicio 1.

1. *Probar que para todo $x > 0$ y $h \in (-x, +\infty)$[6] el cociente incremental $\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}$ está acotado entre $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x+h}$.*
2. *Probar que para todo $x > 0$ la función logaritmo es derivable en x y $log'(x) = \frac{1}{x}$.*

Ejemplo 6. *Derivada de la función seno en 0.*

Ahora calcularemos la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $x = 0$. Es decir, el límite

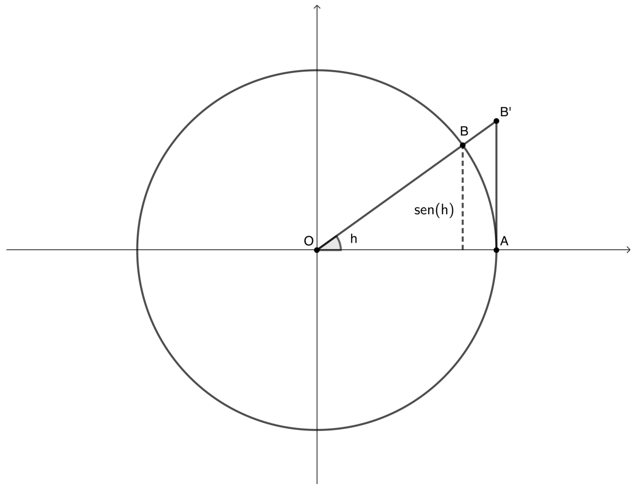
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.$$

Para eso, observemos la siguiente figura, en la que se representa en el círculo trigonométrico a un ángulo $h > 0$. El punto A es $A = (1, 0)$, el punto B es $B = (\cos(h), \operatorname{sen}(h))$, el punto B' es $B' = (1, \tan(h))$ y el punto O es $O = (0, 0)$. Si llamamos F_1 al triángulo AOB, F_2 al sector angular determinado por los puntos A, O y B y F_3 al triángulo AOB', es claro que

$$\text{área}(F_1) \leq \text{área}(F_2) \leq \text{área}(F_3). \tag{5}$$

[5] En realidad, cuando $x = 0$ y $n = 1$ la fórmula anterior no es válida, porque no podemos hacer 0^0. Sin embargo, ya vimos directamente que la derivada de $f(x) = x$ en $x = 0$ da 1.

[6] Es decir, h es tal que $x + h > 0$.



El ángulo h, que hemos tomado positivo, está medido en radianes, y un radián es una proporción $\frac{1}{2\pi}$ del ángulo completo. Por lo tanto, el ángulo h es una proporción $\frac{h}{2\pi}$ del ángulo completo y el área de F_2 es

$$\acute{a}rea(F_2) = \frac{h}{2\pi} \cdot \pi,$$

pues π es el área del círculo. Por otro lado, $\acute{a}rea(F_1) = \operatorname{sen}(h)/2$ y $\acute{a}rea(F_3) = \tan(h)/2$. Por lo tanto, la ecuación (5) dice que

$$\frac{\operatorname{sen}(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)}.$$

Multiplicando por $\frac{2}{\operatorname{sen}(h)}$ esto queda

$$1 \leq \frac{h}{\operatorname{sen}(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}.$$

Tomando los inversos,

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \geq \cos(h),$$

y como $\lim_{h\to 0} cos(h) = 1$, el teorema del sandwich nos dice que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. Usando que la función que a cada x asigna el cociente $\operatorname{sen}(x)/x$ es par, concluimos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$$

Ejercicio 2. *1. Verificar que la función coseno es derivable en 0 y calcular su derivada* $\cos'(0)$.

2. *Usando las igualdades trigonométricas*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\ \operatorname{sen}(x+y) &= \cos(x)\operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x)\cos(y)\end{aligned}$$

probar que $\cos$ *y* sen *son derivables en* $\mathbb{R}$*, y que* $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ *y* $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Un comentario "circular"

En el cálculo anterior se dijo que un radián es una proporción de $\frac{1}{2\pi}$ del ángulo completo. Esta no es la definición habitual de radián. Sin embargo, con esta definición se puede ver que, si π es el área del círculo*, el área de un sector angular de ángulo h es $h/2$, que es lo que hemos usado.

Así, lo anterior puede considerarse una demostración de que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. ¿Cómo podríamos calcular, usando esto, la *longitud* de la circunferencia? No hemos definido en este curso la longitud de una curva, pero podemos pensar que la longitud de la circunferencia es el límite de los perímetros de los n-ágonos regulares inscriptos cuando n se hace cada vez más grande. El perímetro del n-ágono regular se puede calcular como ejercicio, usando un poco de trigonometría. ¿A qué se aproxima este perímetro cuando n crece? ¡Para ver que se aproxima a 2π, tenemos que usar justamente que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$! Es decir, usamos este límite para ver que la longitud de la circunferencia es 2π.

Una vez que sabemos que la longitud de la circunferencia es 2π, podemos ver que el *arco de circunferencia* determinado por un radián tiene longitud 1–lo que normalmente se presenta como la definición de radián.

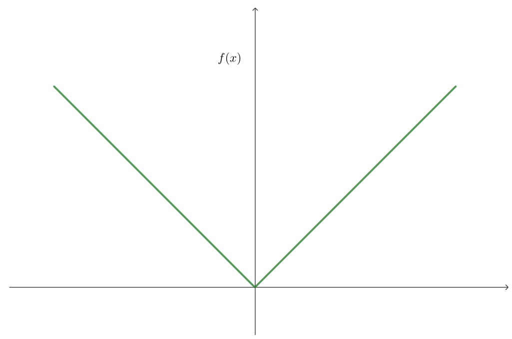
¡Pero que la longitud de la circunferncia es 2π es algo que sabemos de toda la vida! ¿Cómo lo sabemos? Porque nos lo dijeron en la escuela, pero nunca nos explicaron realmente por qué es cierto. Si usamos este dato para calcular el límite del Ejemplo 6, y usamos este límite para "demostrar"que la longitud de la circunferencia es 2π, estamos haciendo un *razonamiento circular*.

*Estamos tan acostumbrados a trabajar con el número π que, cuando lo vemos, no nos despierta ninguna suspicacia. Pero, ¿qué es π? Una definición posible, y de las más razonables, es decir que es el área del círculo de radio 1.

Ejemplo 7. *Una función continua que no es derivable.*

La Proposición 1 nos dice que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto. ¿Será cierta la afirmación recíproca? Es decir, ¿será cierto que si una función es continua en un punto, también es derivable?

No, la vida del estudiante de cálculo no es tan plácida. Para ver esto, consideremos la función valor absoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, cuya gráfica



aparece en la figura. Esta función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, y vamos a ver que no es derivable en 0.

Si pensamos en que la derivada se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica, parece claro que la gráfica de f en 0 no admite una recta tangente. Sin embargo, *la derivada es, por definición, el límite del cociente incremental. Para ver que no existe $f'(0)$, tenemos que ver que no existe el límite del cociente incremental.*

El cociente incremental de f en 0 es

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Cuando $h > 0$, esto vale $\frac{h}{h} = 1$, por lo que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$

Cuando $h < 0$, esto vale $\frac{-h}{h} = -1$, por lo que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

Por lo tanto, no existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$, es decir, f no es derivable en 0.

Un comentario sobre funciones continuas no derivables

Hay incluso funciones continuas en todos los puntos que no son derivables en ninguno de ellos. El primer ejemplo conocido es la "función de Weierstrass", y data del siglo XIX.

Lejos de ser funciones raras, las funciones continuas no derivables en ningún punto son muy abundantes, y muy útiles en muchas aplicaciones de la matemática. Se usan, entre otras cosas, para modelar fenómenos tan diversos como el movimiento de las moléculas en un gas y el precio de activos financieros.

3.2. Un ejemplo que desafía la intuición

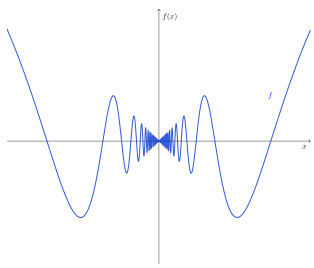
Recordemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

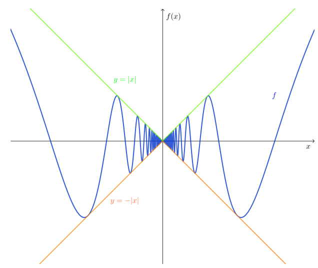
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es continua en 0. El cociente incremental de f en 0 es

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = \operatorname{sen}(1/h),$$

que no tiene límite cuando h tiende a 0, por lo que f no es derivable en 0.





Observemos la figura. La gráfica de la función f está comprendida entre las de las funciones $|x|$ y $-|x|$, dos funciones continuas que valen 0 en 0. Por eso, cerca de 0, hay un *sandwich*

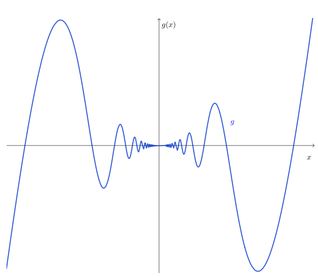
$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

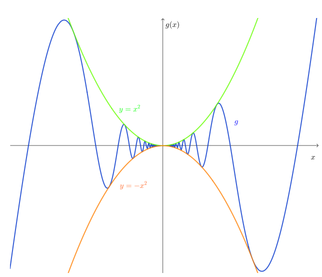
que nos permite ver la continuidad de f en 0.

Consideremos ahora a una parienta cercana de f, que es la función dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$





Al igual que f, esta función es continua en 0. (¡Verificarlo como ejercicio!) El cociente incremental de g en 0 es

$$\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{h^2\text{sen}(1/h)-0}{h} = h\,\text{sen}(1/h),$$

por lo que

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\text{sen}(1/h) = 0.$$

Observemos la figura. La gráfica de la función g está comprendida entre las de las funciones x^2 y $-x^2$, es decir,

$$-x^2 \leq g(x) \leq x^2.$$

Tanto $-x^2$ como x^2 son funciones derivables en 0, y su derivada vale 0. Dicho de otro modo, las parábolas $y=-x^2$ e $y=x^2$ tienen recta tangente en el punto $(0,0)$, que es la recta horizontal $y=0$.

¿Tiene sentido decir que la gráfica de g tiene recta tangente en $(0,0)$, y que esta es la recta horizontal $y=0$? ¡Quién sabe! Pero sí tiene sentido decir que g es derivable en 0 y que $g'(0)=0$, *porque la derivada es el límite del cociente incremental, y lo acabamos de calcular.*

Esta función desafía nuestra intuición geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente. Es un ejemplo elegido para mostrar que la derivada, tal como la definimos, es un concepto un poco más general. Es por ejemplos como este que usamos dibujos de funciones sencillas y razonamientos geométricos para *entender* las ideas y los razonamientos nuevos, pero siempre nos remitimos a las defininciones y a los resultados ya demostrados para *demostrar* (es decir, justificar rigurosamente mediante razonamientos lógicos) teoremas.

3.3. Álgebra de derivadas

Como la derivada es un límite, las propiedades que conocemos de los límites nos permiten calcular derivadas.

Proposición 2. *Si f y g son dos funciones definidas en un intervalo I y derivables en un punto x, entonces $f+g$ y fg también son derivables en x. Si $g\neq 0$ en I, la función f/g también es derivable en x. Estas derivadas valen:*

1. $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Esto nos da una familia importante de ejemplos de funciones derivables.

Ejercicio 3. *Las funciones polinómicas son derivables, y la derivada de* $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$ *es* $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

Ejercicio 4. *La función tangente* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *es derivable, y su derivada es*

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Ejercicio 5. *Demostrar que* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*, usando la linealidad del límite.*

Vamos a demostrar la segunda y la tercera afirmación de la Proposición 2.

Demostración de *2***.**
El cociente incremental para la función fg es

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Lo que hemos hecho es, en el numerador del cociente incremental, sumar y restar $f(x)g(x+h)$. Luego, agrupamos los sumandos convenientemente y aplicamos la propiedad distributiva.

Tomando límite,

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 1, $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, y

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \ \square$$

Demostración de *3***.**
Vamos a calcular la derivada de la función $1/g$. Luego podemos usar la fórmula de la derivada del producto que acabamos de demostrar aplicándola a $f/g = f \cdot (1/g)$.

Observemos que el cociente incremental de $1/g$ en el punto x es

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)},$$

que cuando $h \to 0$ converge a

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{6}$$

Ejercicio 6. *Usando 2 y la ecuación (6), terminar la demostración de 3.*

Observación 2. *El conjunto*

$$V = \{\varphi : I \to \mathbb{R} \;/\; \varphi \text{ es una función derivable en } x\}$$

es un espacio vectorial.

Según la Proposición 2, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ y $(cf)'(x) = cf'(x)$ para toda constante c. Esto nos dice que la función $T : V \to \mathbb{R}$ dada por $T(f) = f'(x)$ es una transformación lineal.

3.4. Regla de la cadena

Cuando escribimos una función "dada por una fórmula", como por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \varphi(x) & = & \operatorname{sen}(\log(x^2+3)) \end{array}$$

estamos, en general, haciendo sumas, productos, cocientes y *composiciones* de funciones más sencillas. Para poder derivar una función así, lo que nos falta es saber cómo derivar una composición de funciones. El resultado que nos dice cómo hacer esto se conoce como *Regla de la Cadena*.

Teorema 1. (Regla de la cadena)
Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de I y $g : I \to J$ y $f : J \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$. Entonces, la composición $f \circ g$ es derivable en x_0 y su derivada es

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Ejemplo 9. *Derivada de $\psi(x) = \log(x^2+3)$.*

Esta función es la composición $\psi = f \circ g$, donde $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ y $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = x^2 + 3$. Ambas funciones son derivables en todo su dominio, y por la Regla de la Cadena $\psi'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Es decir,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2+3} 2x.$$

Ejemplo 10. *Derivada de $\varphi(x) = \operatorname{sen}(\log(x^2+3))$.*

Esta función es la composición $\varphi = h \circ \psi$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ y ψ es la función del ejemplo anterior. Ambas funciones son derivables en todo su dominio, y por la Regla de la Cadena $\varphi'(x) = h'(\psi(x))\psi'(x)$. Es decir,

$$\varphi'(x) = \cos(\log(x^2+3)) \frac{2x}{x^2+3}.$$

Daremos primero una idea de la demostración de la Regla de la Cadena, para luego escribir una demostración rigurosa.

Idea de la demostración del Teorema 1:

El cociente incremental de $f \circ g$ en el punto x_0 es

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h}.$$

Si lo multiplicamos y dividimos por $g(x_0+h) - g(x_0)$, obtenemos

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}. \tag{7}$$

El segundo factor es el cociente incremental de g en x_0, que cuando h tiende a cero converge a $g'(x_0)$.

Por otro lado, como g es derivable en x_0, es también continua en x_0 (por la Proposición 1). Entonces, cuando $h \to 0$, tenemos que $g(x_0+h) \to g(x_0)$, o sea, $g(x_0+h) - g(x_0) \to 0$. Si llamamos k al incremento $k = g(x_0+h) - g(x_0)$[7], el primer factor de (7) nos queda

$$\frac{f(g(x_0)+k) - g(x_0)}{k}.$$

y $k \to 0$ cuando $h \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+k) - g(x_0)}{k} = f'(g(x_0)).$$

Tomando límite del cociente incremental (7), tenemos que

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

El problema con esta idea es que cuando dividimos entre $g(x_0+h) - g(x_0)$ en la ecuación (7), *no tuvimos cuidado de no dividir entre cero*. Es decir, podría pasar que para valores de $h \neq 0$ la diferencia $g(x_0+h) - g(x_0)$ fuera igual a 0.

Por este motivo, en la demostración de la Regla de la Cadena tomaremos una función auxiliar que a primera vista puede parecer un tanto artificial, pero que evitará este problema.

Demostración del Teorema 1:

Consideremos la función φ definida en un entorno de 0 dada por

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} & \text{si} \quad g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ \\ f'(g(x_0)) & \text{si} \quad g(x_0+h) = g(x_0) \end{cases}$$

Ejercicio 7. *Verificar que*

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \varphi(h) \, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \tag{8}$$

para todos los valores de h, y que $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = f'(g(x_0))$.

[7]Hay que tener presente que k depende de h.

Tomando límite con $h \to 0$ en la ecuación (8), nos queda que

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

3.5. Teorema de la función inversa

Recordemos que si una función $f : I \to J$ es biyectiva, su inversa es una función $g : J \to I$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son la función identidad, es decir,

$$f \circ g(x) = x \quad \forall x \in J \tag{9}$$

y

$$g \circ f(x) = x \quad \forall x \in I. \tag{10}$$

En esta sección, I y J serán siempre intervalos en $\mathbb{R}$. Vamos a considerar las preguntas siguientes:

- *Si f es derivable en I, ¿es g derivable en J?*
- *En caso afirmativo, ¿cómo se calcula la derivada?*

Antes de abordar este problema, recordemos algunas particularidades que tienen las funciones biyectivas entre intervalos de $\mathbb{R}$.

Si I y J son intervalos de $\mathbb{R}$ y $f : I \to J$ es *continua* y biyectiva, entonces es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

En el capítulo de continuidad de las notas, ya se vio (Proposición 97) que si f es sobreyectiva y estrictamente monótona (es decir, estrictamente creciente o estrictamente decreciente), entonces es biyectiva. Lo que aquí estamos diciendo es que éstas son las únicas funciones continuas y biyectivas entre intervalos.

Ejercicio 8. *Demostrar la afirmación del recuadro amarillo, con los siguientes pasos como guía:*

1. *Suponer que f no es ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. Probar que en este caso existen $x, y, z \in I$ tales que $x < y < z$ y*
   - *$f(x) < f(y)$ y $f(z) < f(y)$ o*
   - *$f(x) > f(y)$ y $f(z) > f(y)$.*
2. *Suponer que para $x < y < z$ se tiene que $f(x) < f(y)$ y $f(z) < f(y)$, ya que el otro caso es análogo. Probar que existe $\lambda \in (f(x), f(y)) \cap (f(y), f(z))$.*[8]

[8]Recordar el Corlolario 88 de las notas de Continuidad, que dice que la imagen por una función continua de un intervalo es otro intervalo.

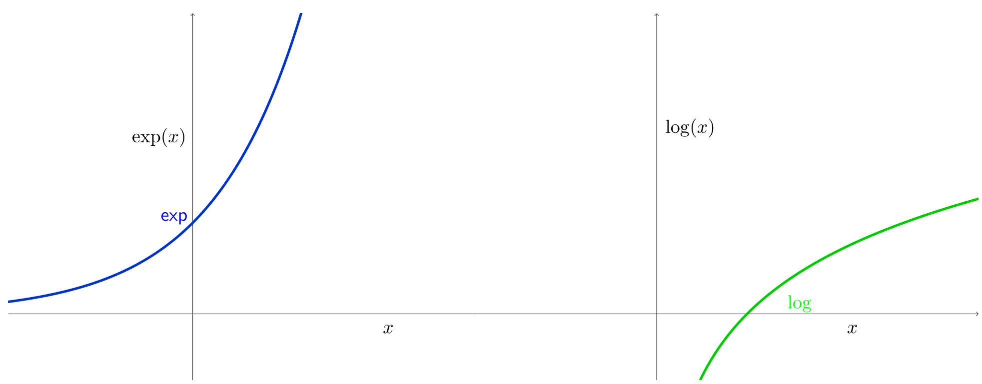
3. *Usando el Teorema de los valores intermedios,*[9] *probar que existen* $w_1 \in (x, y)$ *y* $w_2 \in (y, z)$ *tales que* $f(w_1) = f(w_2) = \lambda$. *Concluir que* f *no es biyectiva.*

En este ejercicio se usaron dos corolarios del Teorema de Bolzano, que es un teorema fundamental sobre las funciones continuas. Dar un ejemplo de una función biyectiva entre dos intervalos de $\mathbb{R}$ *que no sea continua y que no sea estrictamente monótona.*

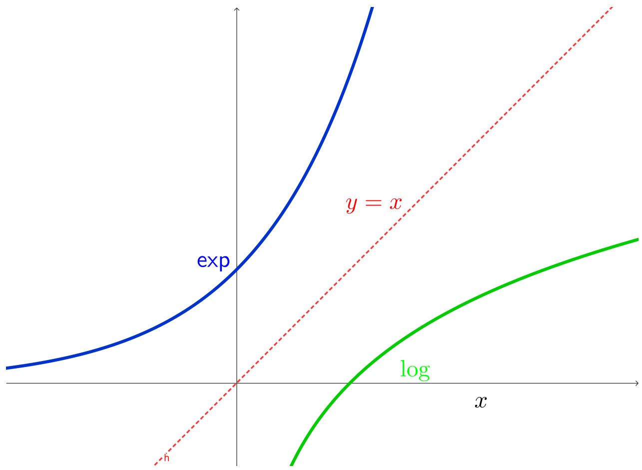
Una función biyectiva f y su inversa g tienen gráficos con la siguiente propiedad geométrica:

> Si $f : I \to J$ es biyectiva y $g : J \to I$ es su inversa, entonces el gráfico de g se obtiene a partir del de f haciendo una simetría axial que tiene como eje a la recta $y = x$.

Esto se ve, por ejemplo, en las gráficas de las funciones exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ y logaritmo $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.



[9] Corolario 87 de las notas de Continuidad.



Veamos por qué es cierto en general. El gráfico de f es el conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y) \in I \times J \ / \ y = f(x)\}.$$

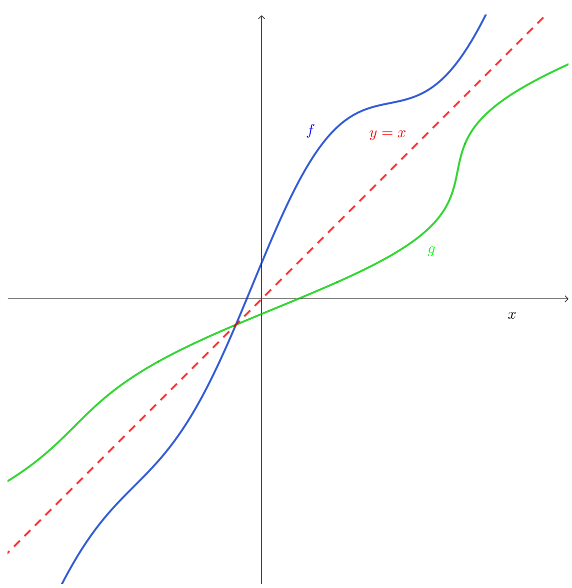
La simetría axial de eje $y = x$ lleva un punto (x, y) en el punto (y, x), por lo que la imagen de $Gr(f)$ por esta simetría es el conjunto

$$X = \{(y, x) \in J \times I \ / \ y = f(x)\}.$$

Como g es la inversa de f, lo podemos escribir como

$$X = \{(y, x) \in J \times I \ / \ g(y) = x\},$$

y esto es exactamente el gráfico de g.



Volvamos a las preguntas que motivaron esta sección.

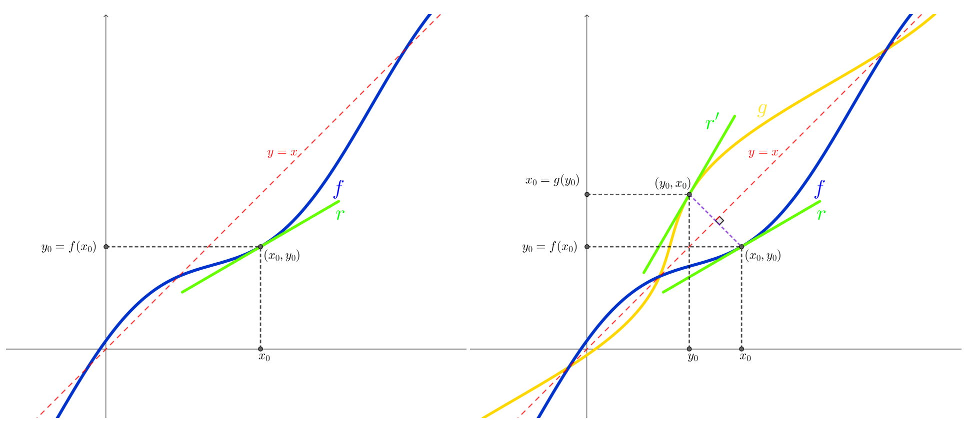
- *Si f es derivable en I, ¿es g derivable en J?*
- *En caso afirmativo, ¿cómo se calcula la derivada?*

La respuesta viene dada en el siguiente resultado, que se llama Teorema de la Función Inversa.

Teorema 2. (Teorema de la función inversa) *Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ una función continua y biyectiva que es derivable en un punto x_0 que es interior a I y $g : J \to I$ la inversa de f. Si $f'(x_0) \neq 0$, g es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y su derivada vale*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Antes de demostrarlo, vamos a tratar de entender geométricamente lo que nos dice este teorema.



Miremos, en la imagen, el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ del gráfico de f. La función f es derivable en x_0 si el gráfico tiene recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y si esta recta tangente no es vertical.[10] En este caso la derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de esta tangente. Llamamos r a esta recta.

En este caso, el punto simétrico $(y_0, x_0) = (y_0, g(y_0))$ del gráfico de g tiene recta tangente, que se obtiene simetrizando r respecto de $y = x$. Llamamos r' a esta recta. Entonces r' es vertical si y sólo si r es horizontal, es decir, si y sólo si $f'(x_0) = 0$. Cuando $f'(x_0) \neq 0$, la recta r' tiene pendiente $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Lo anterior nos indica que si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces g es derivable en $y_0 = f(x_0)$, y su derivada es $\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$, que es exactamente lo que dice el Teorema de la función inversa.

[10] Porque si la tangente es vertical, el límite del cociente incremental es infinito.

Demostración del Teorema de la función inversa.

Supongamos que f es estrictamente creciente, ya que el caso en que es estrictamente decreciente es análogo. En este caso, g también es estrictamente creciente.

Ejercicio 9. *Demostrar que si $f : I \to J$ es estrictamente creciente, su inversa $g : J \to I$ también lo es.*

Vamos a ver en primer lugar que la inversa g de f es continua en $y_0 = f(x_0)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Como x_0 es interior a I, existen $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cap I$ y $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap I$. Al ser f estrictamente creciente, $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_1), f(x_2))$. Como g es estrictamente creciente, para todo $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $g(y) \in (x_1, x_2) \subset (g(y_0) - \varepsilon, g(y_0) + \varepsilon)$.

Usaremos esto para probar que g es derivable en y_0. La derivada de g en y_0 es

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}.$$

Llamando x a $g(y)$, tenemos que $f(x) = y$ y podemos escribir el cociente incremental como

$$\frac{x - g(y_0)}{f(x) - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Como g es continua en y_0, $\lim_{y \to y_0} g(y) = x_0$, por lo que la derivada de g en y_0 queda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \qquad \square$$

Lo anterior demuestra que g es derivable en y_0 y calcula su derivada. Sabiendo que g es derivable, hay una forma sencilla de calcular su derivada usando la regla de la cadena, que es útil para recordarla. La vemos en el siguiente recuadro.

Como $f \circ g(y) = y$, derivando de ambos lados tenemos que $(f \circ g)'(y) = 1$.[a] Por la regla de la cadena, $(f \circ g)'(y_0) = f'(g(y_0))g'(y_0)$, por lo que

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

[a] $f \circ g$ es la función identidad, que es derivable en todos los puntos de J. Por lo tanto, la igualdad $(f \circ g)'(y) = 1$ es cierta para $y \in J$ aun si f y g fueran sólo derivables en x_0 e y_0, respectivamente.

Ejemplo 11. *Derivada de la función exponencial.*

Consideremos la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, que es la inversa de $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ya sabemos que $\log'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Entonces, por el teorema de la función inversa,

$$\exp'(y) = \frac{1}{\log'(\exp(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(y)}} = \exp(y).$$

Es decir, la función exponencial ($\exp(y) = e^y$) es igual a su derivada.

3.6. Regla de L'Hôpital

Una aplicación muy útil de las derivadas al cálculo de límites es la Regla de L'Hôpital, que nos permite calcular muchos límites "indeterminados". Esto es, cociente de dos infinitésimos o de dos infinitos. En esta sección sólo la vamos a enunciar, y daremos su demostración más adelante.

Teorema 3 (Regla de L'Hôpital I)**.** *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b) excepto posiblemente en un punto x_0, y tales que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Si $g'(x) \neq 0$ en un entorno de x_0 y existe* $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, *entonces también existe* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ *y*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación 3. *La Regla de L'Hôpital I sigue siendo cierta si en lugar de tomar límite cuando $x \to x_0$ tomamos un límite lateral $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, e incluso si tomamos límite cuando $x \to \pm\infty$.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 12. *Aplicación de la regla de L'Hôpital a un límite indeterminado de la forma* $0/0$.

Consideremos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Es un límite indeterminado de la forma $0/0$. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos(x)} = 2.$$

Ejemplo 13. *¡Hay que verificar las hipótesis!*

Consideremos el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = 4.$$

Este límite no es indeterminado. Si no observamos esto, podemos caer en la tentación de aplicar la regla de L'Hôpital, y llegar a la conclusión errónea de que

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3.$$

Ejemplo 14. *La Regla de L'Hôpital no resuelve todos los problemas.*

Consideremos el límite
$$lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$
que es un límite indeterminado de la forma 0/0. Aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$
Esto es correcto, pero no útil. Si seguimos aplicando la regla de L'Hôpital, este límite solo "empeora", en el sentido de que el grado del denominador crece.

La regla de L'Hôpital también funciona para indeterminaciones de la forma ∞/∞.

Teorema 4 (Regla de L'Hôpital II)**.** *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a,b) excepto posiblemente en un punto x_0, y tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Si existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ y*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación 4. *La Regla de L'Hôpital II sigue siendo cierta si en lugar de tomar límite cuando $x \to x_0$ tomamos un límite lateral $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, e incluso si tomamos límite cuando $x \to \pm\infty$.*

Ejemplo 15. *Aplicación de la regla de L'Hôpital a un límite indeterminado de la forma ∞/∞.*

Consideremos el límite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\log(x)}.$$
Aquí, $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$, por lo que este límite es indeterminado. Por la regla de L'Hôpital,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = -\infty.$$

4. Teorema del valor medio

Del mismo modo en que vimos algunos teoremas importantes relativos a funciones continuas en un intervalo $[a,b]$,[11] veremos en esta sección teoremas importantes relativos a funciones que son derivables en un intervalo. El principal, y que da nombre a la sección, es el *Teorema del valor medio de Lagrange.*

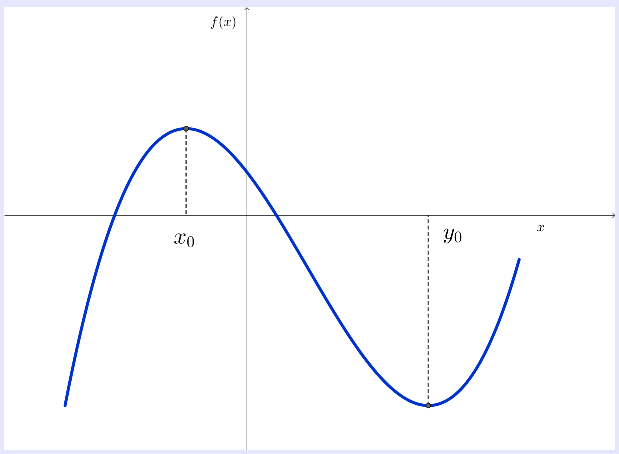
[11]Integrabilidad de funciones continuas, Teorema de Bolzano, Teorema de Weierstrass.

4.1. Extremos relativos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función con dominio en un intervalo I. Recordemos que f tiene un *máximo absoluto* en un punto $x_0 \in I$ si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$. La definición de mínimo absoluto es análoga.

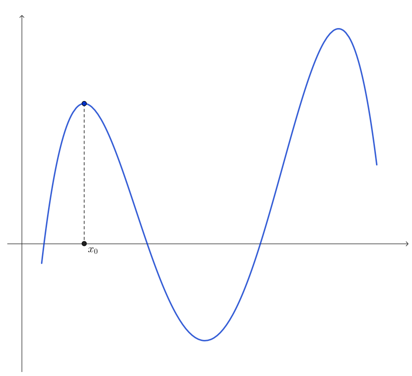
Una noción similar, pero local, es la de *máximo relativo* que damos a continuación.

Definición 2. *La función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en $x_0 \in I$ si existe un entorno U de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap I$.*
La función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en $y_0 \in I$ si existe un entorno U de y_0 tal que $f(x) \geq f(y_0)$ $\forall x \in U \cap I$.



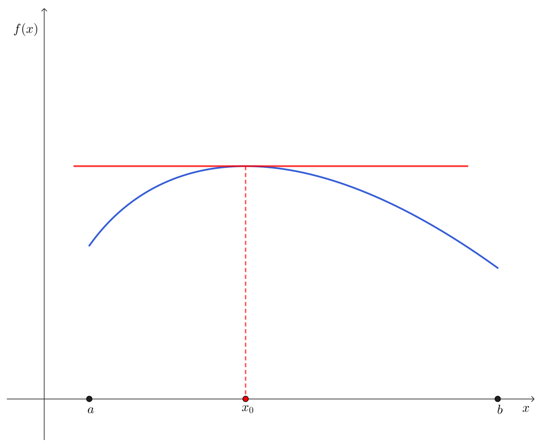
Si f tiene un máximo relativo en x_0 o un mínimo relativo en x_0, decimos que tiene un extremo relativo en x_0.

Claramente, si f tiene un máximo absoluto en x_0, en particular tiene un máximo relativo. En la figura podemos ver una función que tiene un máximo relativo que no es absoluto.



Para funciones derivables, tenemos la proposición siguiente:

Proposición 3. *Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un extremo relativo en x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.*



Demostración:

Supongamos que f tiene un máximo relativo en x_0, ya que el caso en que tiene un mínimo es análogo. Sea U un entorno de f, contenido en (a, b), tal que

$$f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in U.$$

Para $x \in U$, $x > x_0$, el cociente incremental

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es menor o igual que 0, porque $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{11}$$

En forma análoga, para $x \in U$, $x < x_0$, el cociente incremental

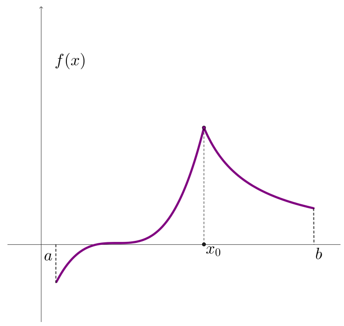
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

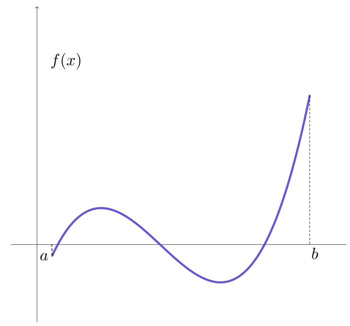
es mayor o igual que 0, por lo que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{12}$$

Como f es derivable en x_0, los límites (11) y (12) son iguales y valen $f'(x_0)$. Esto nos dice que, $f'(x_0) \leq 0$ y $f'(x_0) \geq 0$, por lo que $f'(x_0) = 0$. $\square$

Como siempre, es importante tener en cuenta las hipótesis de esta proposición, a saber, que f es derivable en el punto x_0 en que tiene el extremo y que x_0 es interior al dominio de f. Cuando estas hipótesis no se cumplen, la proposición no vale, como se ve en los dibujos. En uno de ellos hay un extremo en un punto en el que la función no es derivable, y en el otro hay un extremo en un punto que no es interior al dominio de la función.





El recíproco de esta proposición no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo.

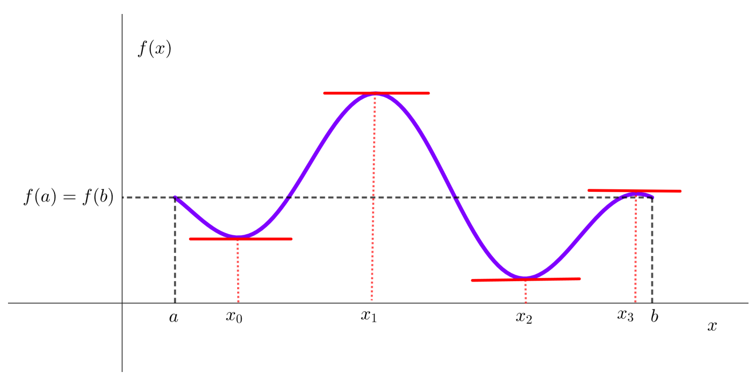
Ejemplo 16. *La derivada puede anularse en un punto donde no hay un extremo.*

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Esta función es derivable en todo su dominio, y es estrictamente creciente. Su derivada es $f'(x) = 3x^2$, por lo que $f'(0) = 0$. Sin embargo, f no tiene un extremo relativo en 0.

4.2. Teorema de Rolle

Teorema 5 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Este teorema nos dice que para una función derivable, si $f(a) = f(b)$, hay algún punto de la gráfica donde la tangente es horizontal. Este punto no tiene por qué ser único, como se ve en la figura.



Demostración.

Consideremos primero el caso (muy particular) en que f es constante, es decir, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$. En este caso $f'(x) = 0$ en todos los puntos, por lo que el teorema vale.

Nos queda en caso en que f no es constante. Como f es continua en $[a, b]$, el Teorema de Weierstrass nos asegura que tiene máximo y mínimo absolutos.

Los extremos absolutos pueden darse en el interior de $[a, b]$ o en el borde de $[a, b]$, pero como $f(a) = f(b)$, algún extremo absoluto tiene que darse en un punto de (a, b). En efecto, si el máximo absoluto se da en a también se da en b, y como f no es constante el máximo y el mínimo no coinciden. Esto asegura que el mínimo se da en algún punto de (a, b). Lo mismo pasa si en a y b hay un mínimo.

Sea entonces $c \in (a, b)$ un punto donde hay un extremo absoluto. Entonces, como f es derivable en c, $f'(c) = 0$. □

Si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es la posición de un móvil que se mueve en una dimensión, la condición $f(0) = f(T)$ significa que la posición inicial es igual a la posición final. El teorema de Rolle nos dice que, en un movimiento unidimensional, si la posición inicial y la posición final coinciden, hay un momento intermedio en que la velocidad es igual a cero.

4.3. Teorema del valor medio de Lagrange

El teorema del valor medio de Lagrange se demuestra a partir del de Rolle, y es más general. Dice lo siguiente:

Teorema 6 (Teorema del valor medio de Lagrange)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observemos que el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de f. Llamemos s a este segmento. Lo que nos dice este teorema es que hay un punto $c \in (a, b)$ para el cual la tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$ es paralela al segmento s. Al igual que en el teorema de Rolle, este punto podría no ser único. (Si f es una función lineal, todos los puntos cumplen esto).

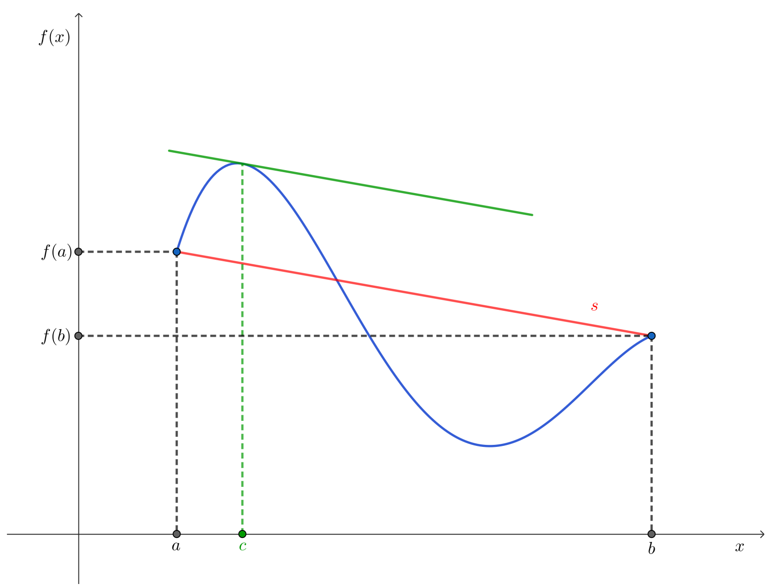
Si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es la posición de un móvil que se mueve en una dimensión, el cociente $\bar{v} = \frac{f(T)-f(0)}{T}$ es la velocidad media. Lo que nos dice el teorema de Lagrange es que hay un momento intermedio en que la velocidad instantánea es igual a $\bar{v}$.
Supongamos, por ejemplo, que un auto que circula por la ruta interbalnearia pasa por el peaje Pando a las 3 de la tarde y por el peaje Solís a las 3:20. La distancia entre ambos peajes es de 48,6 km, y el auto la recorrió en 20 minutos, es decir, en 1/3 de hora. La velocidad media es por lo tanto

$$\bar{v} = \frac{48,6km}{\frac{1}{3}h} = 145,8\,km/h.$$

La velocidad máxima permitida es $110\,km/h$. ¿Es correcto que al llegar al peaje Solís el auto sea multado? ¡Claro que sí! El teorema del valor medio de Lagrange nos *asegura* que en algún momento entre las 3:00 y las 3:20 la velocidad instantánea fue de $145,8\,km/h$, lo cual supera en mucho la velocidad máxima permitida.

Demostración del Teorema 6.

La imagen que ilustra el teorema de Lagrange es similar a la que ilustra el teorema de Rolle, pero "torcida". La idea de esta demostración consiste en tomar una función auxiliar "enderece" a f, de modo de poder aplicarle el teorema de Rolle.



Observemos, en la figura, la gráfica de f y el segmento s, que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El segmento s es la gráfica de una función lineal $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.

La derivada de h es constante e igual a la pendiente de s, es decir, es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Además, la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ que es la diferencia $g = f - h$ cumple $g(a) = g(b) = 0$. Es decir, g está en las hipótesis del teorema de Rolle. Por lo tanto, existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = f'(c) - h'(c)$, esto quiere decir, que $f'(c) = h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Observación 5. *La función h que tomamos está dada por $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$. Lo único que nos importa de ella es que es una función lineal con derivada $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por lo que con cualquier función así se puede hacer el mismo argumento.*[12]

Observación 6. *El Teorema 5 es un caso particular del Teorema 6. En efecto, cuando $f(b) = f(a)$, el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ vale 0, y en el punto intermedio c dado por el teorema de Lagrange se cumple que $f'(c) = 0$.*

4.4. Demostración de la Regla de L'Hôpital

En esta sección daremos (¡al fin!) una prueba del Teorema 3, la Regla de L'Hôpital I.

Lema 1. *Observemos que, bajo las hipótesis del Teorema 3, existe un entorno reducido de x_0 donde $g(x) \neq 0$.*

Demostración.

Sabemos por hipótesis que existe un entorno de x_0 donde $g'(x) \neq 0$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in E^*(x_0, \delta)$.

Supongamos que en todo entorno reducido de x_0 hay ceros de la función g. En particular, existe $y_0 \in E^*(x_0, \delta)$ tal que $g(y_0) = 0$. Sea $\delta_1 = d(x_0, y_0)$, y observemos que $\delta_1 < \delta$. Existe $y_2 \in E^*(x_0, \delta_1)$ tal que $g(y_1) = 0$.

Si y_0 e y_1 son ambos mayores que x_0, tenemos que $x_0 < y_1 < y_0 < x_0 + \delta$. La función g es derivable en el intervalo (y_1, y_0), continua en $[y_1, y_0]$ y $g(y_1) = g(y_0) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (y_1, y_0)$ tal que $g'(c) = 0$. Esto es absurdo porque, por hipótesis, no hay ceros de g' en $E^*(x_0, \delta)$.

Si y_0 e y_1 son ambos menores que x_0, haciendo un argumento análogo también llegamos a una contradicción.

Si $(y_0 - x_0)(y_1 - x_0) < 0$, tomemos $\delta_2 = d(x_0, y_1)$. Existe $y_2 \in E^*(x_0, \delta_2)$ tal que $g(y_2) = 0$. De los tres puntos y_0, y_1 e y_2, dos deben estar del mismo lado de x_0, y podemos aplicarles el razonamiento anterior. $\square$

Demostración del Teorema 3.

Las funciones f y g pueden no estar definidas en x_0, por lo que consideramos las nuevas funciones con dominio (a,b) dadas por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

[12] ¿Por qué para cualquier función lineal h con derivada $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se cumple que $(f-h)(a) = (f-h)(b)$?

y

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Son continuas en x_0. Fijemos $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Supongamos que $x > x_0$, ya que el otro caso es análogo. Sea

$$h : [x_0, x] \to \mathbb{R}$$

la función dada por

$$h(y) = F(y)G(x) - G(y)F(x).$$

Entonces h es continua en $[x_0, x]$ y derivable en (x_0, x). Además, $h(x) = h(x_0)$.[13] Por el teorema de Rolle, existe $c_x \in (x_0, x)$ tal que $h'(c_x) = 0$.

Como $h'(y) = F'(y)G(x) - G'(y)F(x) = f'(y)g(x) - g'(y)f(x)$, esto quiere decir que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cuando $x \to x_0^+$, $c_x \to x_0^+$, por lo que tomando límite de ambos lados de esta igualdad tenemos que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De forma análoga probamos que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

y esto concluye la demostración. □

No demostraremos la Regla de L'Hôpital II que sirve para las indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se demuestra haciendo un cambio de variable (astuto) a partir de la anterior.

5. Crecimiento y clasificación de extremos

5.1. Crecimiento y signo de la derivada

El Teorema del valor medio de Lagrange tiene muchas consecuencias geométricas importantes para las funciones derivables. Una de ellas es que nos indica cuándo una tal función *crece, decrece o permanece constante.*

Proposición 4. *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante.*

[13] ¡Verificarlo!

Demostración.

Para ver que f es constante, tenemos que demostrar que para cualquier par de puntos $a, b \in I$, $f(a) = f(b)$. Tomemos entonces $a, b \in I$ con $a < b$. La restricción de f al intervalo $[a, b]$ está en las hipótesis del Teorema 6, por lo que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como $f'(c) = 0$, esto nos dice que $f(b) = f(a)$. $\square$

Recordemos que f es creciente en un intervalo I si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Decimos que es *estrictamente creciente* si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$ se cumple que $f(x) < f(y)$. La definición de función estrictamente decreciente es análoga.

Teorema 7. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable.*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.*

Demostración.

Demostraremos lo primero, ya que lo segundo es análogo.

Tomemos $a, b \in I$ con $a < b$. La restricción de f al intervalo $[a, b]$ está en las hipótesis del Teorema 6, por lo que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como $f'(c) > 0$, esto nos dice que $f(b) > f(a)$. $\square$

Ejemplo 17. *Estudio del crecimiento a partir del signo de la derivada.*

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1).$$

Por lo tanto,

- f' se anula en -1 y en 3.
- f' es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.
- f' es negativa en $(-1, 3)$.

De lo anterior podemos concluir que f es estrictamente decreciente en $(-1, 3)$, que es estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$ y que también es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.

Ejercicio 10. *Sea $g : (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ la restricción de la función f del ejemplo anterior al conjunto $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. ¿Es g una función creciente?*

Ejemplo 18. *La condición dada en el Teorema 7 para que f sea estrictamente creciente es suficiente, pero no necesaria.*

Para ver esto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Es estrictamente creciente, y $f'(0) = 0$.

En el Teorema 7 se pide que f' sea positiva (o negativa) en un intervalo. Veremos en el siguiente ejemplo que si $f' > 0$ en un punto, esto no es suficiente para garantizar que f crece en un entorno de ese punto.

Ejemplo 19. *Función con derivada positiva en un punto que no es creciente en un entorno del punto.*

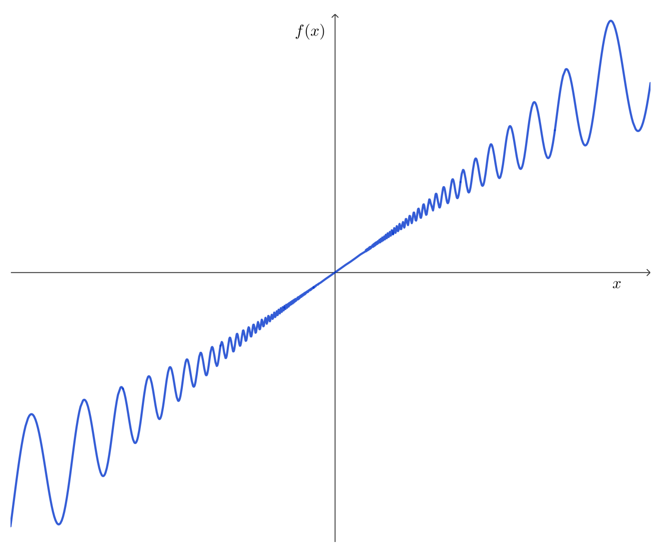
Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ porque se obtiene haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones derivables. También es derivable en 0 (ver el Ejemplo 8), y $f'(0) = \frac{1}{10}$.

Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{10} + 2x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$



Ejercicio 11. *Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, la derivada f' toma valores positivos y negativos en el intervalo $(0, \varepsilon)$.*

Observemos que en $\mathbb{R} - \{0\}$ la derivada f' es continua. Por lo tanto, el Teorema de conservación del signo nos asegura que si $f'(x_0) > 0$ en un $x_0 \neq 0$, entonces hay un entorno de x_0 donde $f' > 0$.

Del ejercicio y de la observación anterior podemos concluir que en $(0, \varepsilon)$ hay subintervalos donde la función f crece y donde la función f decrece. Por lo tanto, a pesar de que $f'(0) > 0$, no hay ningún entorno de 0 donde f sea creciente.

5.2. Clasificación de extremos a partir del signo de la derivada

Definición 3. *Sea f una función que es derivable en un punto x_0 de su dominio. Si $f'(x_0) = 0$, decimos que x_0 es un punto crítico de f.*

Usando esta definición, podemos reescribir la Proposición 3 diciendo que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in (a, b)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.[14]

Hasta ahora, vimos cómo el signo de f' nos sirve para estudiar el crecimiento de f en los intervalos que no contienen puntos críticos. Ahora veremos lo que el signo de f' nos dice sobre los puntos críticos de f. Comenzaremos con un par de ejemplos.

Ejemplo 20. *Clasificación de extremos.*

Retomemos la función del Ejemplo 17, es decir, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Ya hemos visto que su derivada se anula cuando $x = -1$ y cuando $x = 3$, y hemos estudiado el crecimiento de f en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

¿Qué podemos decir de los puntos -1 y 3? Como en esos puntos f' vale 0, de acuerdo a la Proposición 3 podría haber en ellos extremos relativos.

Observemos que para $x < -1$ la función f crece, y a partir de -1 empieza a decrecer. Por lo tanto, en el punto $x = -1$ la función f tiene un máximo relativo. Para $-1 < x < 3$ la función f decrece, y a partir de 3 empieza a crecer. Por lo tanto, en el punto $x = 3$ la función f tiene un mínimo relativo.

Ejemplo 21. *Identificación de un punto crítico que no es un extremo.*

Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$.

Por lo tanto,

- f' se anula únicamente en 1.
- f' es positiva en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

De lo anterior podemos concluir que f es estrictamente creciente tanto en $(-\infty, 1)$ como en $(1, +\infty)$. ¿Qué pasa en $x = 1$? La función f crece para $x < 1$, y también para $x > 1$. Por lo tanto, en el punto crítico 1 no hay ni un máximo ni un mínimo relativo.

[14] Atención: es fundamental para que esta proposición sea cierta que $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq b$.

5.3. Clasificación de extremos con la derivada segunda

Decimos que una función f es *dos veces derivable* en un intervalo I si es derivable en I y su derivada, f', es a su vez derivable en I. La derivada de f' se denota por f'', y se llama *derivada segunda* (o *derivada de orden dos*) de f.

Como la derivada de f nos habla del crecimiento y decrecimiento de f, la derivada segunda nos habla del crecimiento y decrecimiento de f'. Veremos una primera aplicación de este fenómeno en la clasificación de los extremos relativos de f.

Teorema 8. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable en (a, b) y tal que f'' es continua. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f.*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.*

Demostración.

Demostremos el primer inciso, ya que el segundo es análogo.

Como $f''(x_0) > 0$ y f'' es continua, por el Teorema de conservación del signo existe $\delta > 0$ tal que f'' es positiva en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. El Teorema 7 nos dice por lo tanto que f' es estrictamente creciente en ese entorno.

Como $f'(x_0) = 0$, lo anterior implica que $f' < 0$ en $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f' > 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$. Es decir, f decrece a la izquierda de x_0 y crece a la derecha de x_0. Concluimos que f tiene en x_0 un mínimo relativo. □

Ejemplo 22. *Clasificación de extremo usando la derivada segunda.*

Consideremos nuevamente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1),$$

por lo que los puntos críticos de f son -1 y 3. La derivada segunda de f es

$$f''(x) = 6x - 6,$$

que por ser una función polinómica es continua. Como $f''(-1) = -12 < 0$ y $f''(3) = 12 > 0$, concluimos que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

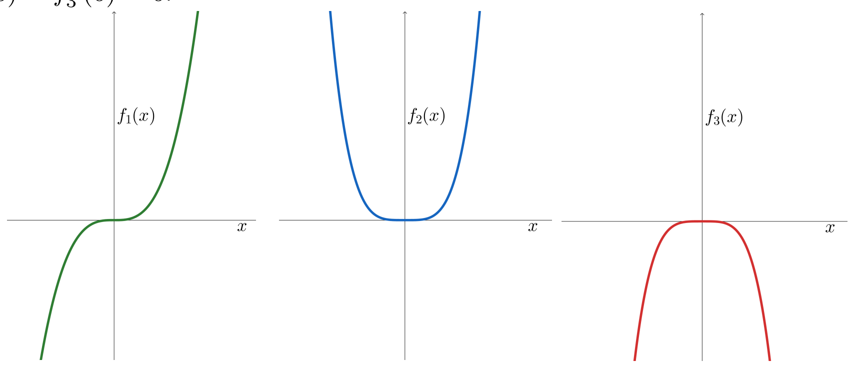
Ejemplo 23. *¿Qué pasa cuando $f''(x_0) = 0$?*

El criterio anterior no nos dice lo que pasa en un punto crítico x_0 cuando $f''(x_0) = 0$. En este caso, la derivada segunda no sirve para clasificar el punto crítico. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

Consideremos las funciones f_1, f_2 y f_3 definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^4, \quad f_3(x) = -x^4.$$

Para todas ellas, 0 es un punto crítico. Es decir, $f_1'(0) = f_2'(0) = f_3'(0) = 0$. Además, para todas ellas, la derivada segunda se anula en 0. Es decir, $f_1''(0) = f_2''(0) = f_3''(0) = 0$.



Observemos que f_2 tiene un máximo relativo en 0, f_3 tiene un mínimo relativo en 0, y f_3 no tiene extremo relativo en 0.

Resumamos brevemente lo que sabemos sobre la clasificación de extremos, en el siguiente recuadro.

Si tenemos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el Teorema de Weierstrass nos asegura que f tiene máximo y mínimo absolutos. Es decir, hay al menos dos puntos de $[a, b]$ donde f presenta un extremo relativo.

Si además f es derivable en (a, b), los extremos relativos que se den en puntos de (a, b) deben darse en puntos críticos. Por lo tanto, para encontrar los extremos relativos, buscamos primero puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que $f'(x_0) = 0$. Estudiando el signo de f' en un entorno de x_0, a veces podemos determinar si en x_0 hay un máximo relativo, un mínimo relativo, o si no hay un extremo relativo.

Si además f' es derivable en (a, b) y f'' es continua, a veces podemos determinar si en un punto crítico x_0 tenemos un máximo o un mínimo, mirando el signo de f''.

Ejemplo 24. *Búsqueda y clasificación de extremos para una función definida en un intervalo cerrado.*

Consideremos la función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 3.$$

Su derivada es

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 60x - 24 = 12(x - 1)^2(x - 2),$$

por lo que los puntos críticos de f en $(0,3)$ son $x = 1$ y $x = 2$. La derivada segunda de f es

$$f''(x) = 36x^2 - 96x + 60.$$

Como $f''(2) > 0$, podemos concluir que f tiene en $x = 2$ un mínimo relativo. Sin embargo, $f''(1) = 0$, por lo que la derivada segunda de f no nos sirve para determinar si en $x = 1$ hay o no un extremo. Sin embargo, si miramos el signo de f', vemos que $f' < 0$ en $(0,1)$ y en $(1,2)$, por lo que f es decreciente en estos intervalos. De esta información sí podemos concluir que f **no** tiene un extremo en $x = 1$.

Veamos qué pasa en los puntos 0 y 3, ya que, al ser $[0,3]$ el dominio de f, podría haber extremos relativos en esos puntos aunque no se anule la derivada. Como $f' < 0$ en $(0,1)$, ahí la función f es estrictamente decreciente, por lo que f tiene un máximo relativo en 0. Análogamente, como $f' > 0$ en $(2,3)$, ahí f es estrictamente creciente, por lo que f tiene un máximo relativo en 3.

¿Qué pasa con los extremos absolutos? El mínimo absoluto de f debe darse en el único punto en que hay un mínimo relativo, es decir, en $x = 2$. Por lo tanto el mínimo absoluto de f es $f(2) = -5$. El máximo absoluto puede darse en $x = 0$ o en $x = 3$. Como $f(0) = 3$ y $f(3) = 12$, el máximo absoluto es $f(3) = 12$.