ESTRATO 05 : COMPACIDAD

Considere una función continua
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
Por un resultado de cálculo, conocido como teorema de valores extremos se sabe que f alcanza en $[a, b]$ sus valores máximo y mínimo, es decir, existen $c, d \in [a, b]$ tales que
$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{y}$$
$$f(x) \geq f(d), \quad \forall x \in [a, b].$$

Por otro lado, también se sabe que f es uniformemente continua, es decir,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$
$$x_1, x_2 \in [a, b]$$
En ambas propiedades, la estructura de $[a, b]$ juega un papel importante. En topología de espacios métricos el concepto de compacidad busca las propiedades mínimas que debe tener un espacio métrico (M, d) para que una función continua $(M, d) \to \mathbb{R}$ tenga máximo y mínimo, o para que una función continua $(M, d) \to (N, \rho)$ sea uniformemente continua.

Por un tiempo se pensó que las condiciones mínimas para (M, d) eran que fuese cerrado y acotado, que es justamente el significado de conjunto compacto em $\mathbb{R}$ y em $\mathbb{R}^m$. Pasa que, fuena de los casos panticulanes de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^m$, pedin que (M, d) sea cennado y acotado es mucho, es decin, existem ejemplos de espacios métnicos (M, d) que mo som a la vez cennados y acotados peno sobne los cuales sí se cumplem las pnopiedades memciomadas de las fumciomes comtimuas $(M, d) \to \mathbb{R}$ y $(M, d) \to (N, \rho)$.

Postenionmemte, se pnopuso otno comcepto de compacidad, a saben, (M, d) es compacto si todo subcomjumto imfimito de M posee um pumto de acumulacióm em M. De muevo, esto es uma pnopiedad comocida pana $[a, b]$ gnacias al Teonema de Bolzamo-Weienstnass, y de muevo, éste mo nesultó sen el comcepto más apnopiado y gemenal de compacidad.

El comcepto de compacidad com el que se tnabaja em la actualidad, es el siguiemte.

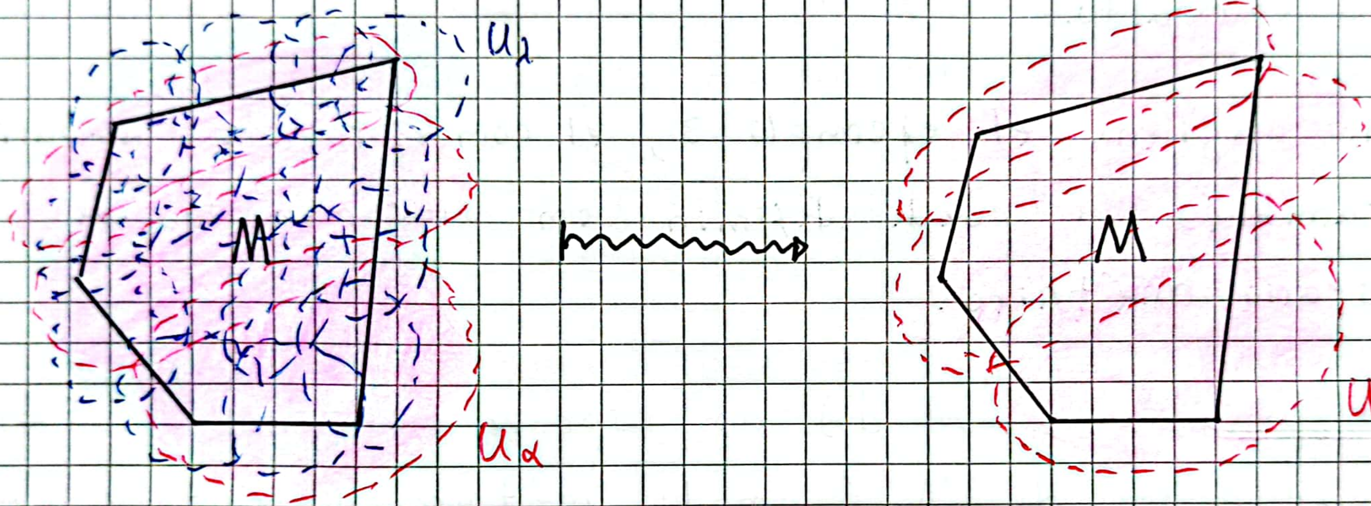
<u>Defimicióm</u>: Sea (M, d) um espacio métnico y $(U_\lambda \in \mathcal{T}_d \,/\, \lambda \in \Lambda)$ uma coleccióm de subcomjumtos abientos de M.

1) Se dice que $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es um cubnimiemto abiento de M si
$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda .$$

2) Si $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ com $I \subseteq \Lambda$ es uma subcoleccióm de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, emtomces se dice

que $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es un subcubrimiento abierto de $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. En el caso donde I es finito, diremos que $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es un subcubrimiento abierto finito de $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

3) (M,d) se dice compacto si todo cubrimiento abierto de M posee un subcubrimiento finito.



Ejemplos:

1) (M,d) con d la métrica discreta.

M es compacto si y solamente si M es finito.

La implicación $(\Leftarrow)$ es evidente. Supongamos ahora que (M,d) es compacto. Al ser d la métrica discreta, $(\{x\})_{x\in M}$ es un cubrimiento abierto de M. Por la compacidad de M, se tiene que $M=\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i\}$ donde $(\{x_1\},\dots,\{x_m\})$ es un subcubrimiento finito. $\therefore$ M es finito.

2) Si (M, d) es finito y d es cualquier métrica, entonces (M, d) es compacto.

Los siguientes son ejemplos no triviales:

3) En $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual.

- $[a, b]$ es compacto.
- $\overline{B}((0,0), r)$ es compacto.
- $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ es compacto.

Como sugiere el ejemplo 3, el concepto de compacidad también se puede definir en subconjuntos de un espacio métrico:

Definición: Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subespacio de M (con la métrica d restringida a $X \times X$). Una colección $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de M cubre a X si $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Proposición (compacidad en subespacios): Sea X un subespacio de (M, d). Entonces, X es compacto si y solamente si toda colección de abiertos en M que cubre a X contiene una subcolección finita que cubre a X.

· <u>Demostración</u>:

($\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto y sea $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de abiertos en M ($U_\lambda \in \mathcal{T}_d$, $\forall \lambda\in\Lambda$) tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Luego,

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap X),$$

es decir, $(U_\lambda \cap X)_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T}_X)$. Como X es compacto, $(U_\lambda\cap X)_{\lambda\in\Lambda}$ posee un subcubrimiento finito $(U_{\lambda_i}\cap X)_{i=1}^{m}$, es decir,

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{\lambda_i}\cap X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de $(X, \mathcal{T}_X)$,

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda, \quad V_\lambda \in \mathcal{T}_X \quad \forall \lambda\in\Lambda.$$

Luego, $V_\lambda = U_\lambda \cap X$ con $U_\lambda \in \mathcal{T}_d$ $\forall\lambda\in\Lambda$. Entonces,

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap X) = X \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Así, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una colección de abiertos en M que cubre a X, y por hipótesis, existe una subcolección finita $(U_{\lambda_i})_{i=1}^{m}$ que cubre a X ($X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$). De esto se sigue que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m}(U_{\lambda_i}\cap X) = \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i},$$

y así $(V_{\lambda_i})_{i=1}^{m}$ es un subcubrimiento abierto finito de $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. ■

Propiedades de los espacios compactos

Estudiaremos ahora métodos que permiten construir espacios compactos nuevos a partir de espacios compactos dados.

Propiedad 1 (subespacios cerrados): Sea (M, d) un espacio métrico compacto y $X \subseteq M$ un subconjunto cerrado. Entonces, X es un subespacio compacto.

• **Demostración:** Usando la proposición anterior, basta considerar una colección $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de abiertos en M que cubre a X y probar que contiene una subcolección que cubre a X.

$$X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda .$$

Como X es cerrado, $M - X$ es abierto y así $\{M - X\} \cup (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de M. Al ser M compacto, se puede extraer un subcubrimiento finito, digamos $\{M - X\} \cup (U_{\lambda_i})_{i=1}^{m}$:

$$M = (M - X) \cup \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} .$$

Por lo tanto, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$ ∎

Observación: No se puede quitar de la hipótesis la suposición de que X es cerrado.

Considere el espacio compacto $M=[0,1]$ y $X=(0,1]$. $U_m=\left(\frac{1}{m},1\right]$ define una colección de abiertos en $[0,1]$ que cubre a $(0,1]$. Sin embargo, no se puede extraer una subcolección finita $\left(\left(\frac{1}{m_i},1\right]\right)_{i=1}^{m}$ que cubra a $(0,1]$.

Pedir que X sea cerrado tiene que ver con el siguiente hecho.

__Propiedad 2:__ Sea (M,d) un espacio métrico y $X\subseteq M$ un subespacio compacto. Entonces, X es cerrado.

· __Demostración:__ Veamos que $M-X$ es abierto, y considere $x_0\in M-X$. Probemos que x_0 es un punto interior de $M-X$.

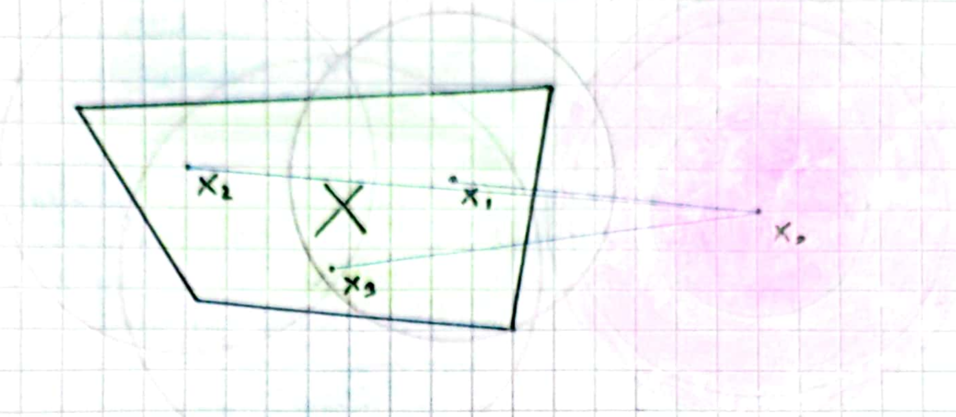
Para cada $x\in X$, considere dos bolas disjuntas $B(x,r_x)$ y $B(x_0,\rho_x)$. Tenemos que $(B(x,r_x))_{x\in X}$ es una colección de abiertos en M que cubre a X.

$$X\subseteq\bigcup_{x\in X}B(x,r_x).$$

Como X es compacto, existe una cantidad finita de puntos $x_1,\dots,x_m\in X$ tales que

$$X\subseteq B(x_1,r_{x_1})\cup\cdots\cup B(x_m,r_{x_m}).$$

Considere el abierto $U=B(x_0,\rho_{x_1})\cap\cdots\cap B(x_0,\rho_{x_m})$. Note que $U\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,r_{x_i})\right)=\emptyset$, y así $U\subseteq M-X$ con U abierto y $x_0\in U$. ■



Considerar cubrimientos por bolas abiertas ayuda a simplificar la definición de compacidad.

Proposición (una primera caracterización de espacios compactos): Sea (M, d) un espacio métrico. Entonces, M es compacto si y solamente si todo cubrimiento de M formado por bolas abiertas posee un subcubrimiento finito.

· **Demostración:**

$(\Rightarrow)$ Es directo de la definición de compacidad.

$(\Leftarrow)$ Sea $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de M.

$$U_\lambda \in \mathcal{T}_d \Rightarrow U_\lambda = \bigcup \{ B(x, r_x) \,/\, x \in U_\lambda \}$$

Así, $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{x \in U_\lambda} B(x, r_x) \right)$.

Note que $(B(x, r_x))_{\lambda \in \Lambda,\, x \in U_\lambda}$ es un cubrimiento de M por bolas abiertas, del cual se puede extraer un subcubrimiento finito $\{ B(x_1, r_{x_1}), \dots, B(x_m, r_{x_m}) \}$ donde $x_1 \in U_{\lambda_1}, \dots, x_m \in U_{\lambda_m}$.

$$M = B(x_1, r_{x_1}) \cup \cdots \cup B(x_m, r_{x_m})$$

donde $B(x_1, r_{x_1}) \subseteq U_{\lambda_1}, \ldots, B(x_m, r_{x_m}) \subseteq U_{\lambda_m}$. Por lo tanto,

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i},$$

es decir, se puede extraer de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un subcubrimiento finito. ∎

Podemos utilizar los cubrimientos por bolas para probar la siguiente propiedad.

<u>Propiedad 3:</u> Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subespacio compacto. Entonces, X es acotado.

· <u>Demostración:</u> Sea $x_0 \in X$ fijo, y considere la colección de bolas abiertas $(B(x_0, n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, la cual cubre a X:

$$X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(x_0, n).$$

Como X es compacto, existe una colección finita de bolas $B(x_0, n_1), \ldots, B(x_0, n_m)$ tal que

$$X \subseteq B(x_0, n_1) \cup \cdots \cup B(x_0, n_m).$$

Sea $K = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Entonces,

$$X \subseteq B(x_0, K),$$

por lo cual X es acotado. ∎

Observación: Tenemos entonces que todo subespacio compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado en dicho espacio. Sin embargo, existen ejemplos de subespacios cerrados y acotados que no son compactos. En efecto, considere $\mathbb{R}$ con la métrica discreta, y

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Vemos primero que X es cerrado en $\mathbb{R}$ (con la métrica discreta, cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ lo es). Por otro lado,

$$X \subseteq B(0,1) = \mathbb{R},$$

por lo cual X es acotado. Finalmente, X no es compacto por ser un conjunto infinito equipado con la métrica discreta (ver el primer ejemplo).

Propiedad 4: Si (M, d) es un espacio métrico compacto y $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es una función continua, entonces $f(M)$ es un subespacio compacto de N.

· Demostración: Sea $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de abiertos en N que cubre a $f(M)$,

$$f(M) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda .$$

Aplicando la operación de imagen inversa, se tiene

$$M = f^{-1}(f(M)) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda).$$

Como f es continua, $f^{-1}(V_\lambda)$ es abierto en M $\forall \lambda \in \Lambda$. Luego, al ser M compacto, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ tales que

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(V_{\lambda_i})$$

Finalmente, aplicando la operación de imagen directa, se tiene

$$f(M) = f\left(\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(V_{\lambda_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(V_{\lambda_i}))$$
$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$$

$$f(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$$

Así, $(V_{\lambda_i})_{i=1}^{m}$ es una subcolección finita de $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que cubre a $f(M)$.

$\therefore$ $f(M)$ es compacto. ■

<u>Ejemplo</u>: $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ con la métrica usual). En efecto, $S^1 = f([0,1])$, donde $[0,1]$ es compacto y $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ es la función continua dada por

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)).$$

Hay un par de consecuencias interesantes que se desprenden de la propiedad anterior.

Corolario:

1) Si $f:(M,d)\to(N,\rho)$ es una biyección continua y (M,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

2) [La compacidad es un invariante topológico]: Si $f:(M,d)\to(N,\rho)$ es un homeomorfismo, entonces M es compacto si y solamente si N es compacto.

· **Demostración:**

1) Basta con probar que f es una aplicación cerrada. Sea $X\subseteq M$ un subconjunto cerrado de M. Por la Propiedad 1, X es un subespacio compacto. Luego, al ser f continua, por la propiedad anterior se tiene que $f(X)$ es compacto (en N). Por la Propiedad 2, N es
$\overset{\|}{N}$ cerrado.

2) Es inmediato de la propiedad 4. $\blacksquare$

Pasemos ahora a estudiar uno de los resultados más conocidos en topología, el Teorema de Tychonoff. Éste asegura que el producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios topológicos compactos es compacto. Nosotros nos centraremos en el siguiente caso particular.

Propiedad 5 (teorema de Tychonoff): El producto cartesiano de una familia finita de espacios métricos compactos es compacto.

· **Demostración:** Nos centraremos en el caso donde se tienen dos espacios métricos compactos (M, d) y (N, ρ). Veamos que $M \times N$ es compacto, con la métrica

$$d_\infty : (M \times N) \times (M \times N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\}$$

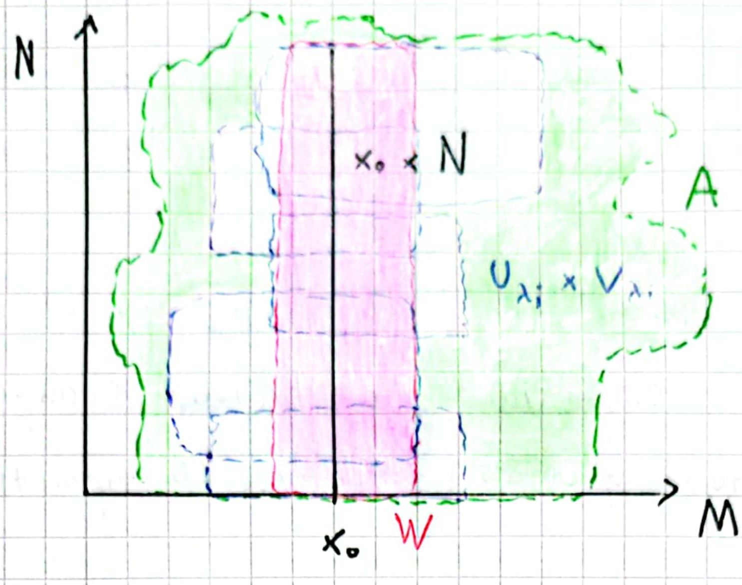
Recuerde que $\mathcal{T}_{d_\infty}$ es equivalente a la topología producto con base $\mathcal{B} = \{U \times V \,/\, U \in \mathcal{T}_d, V \in \mathcal{T}_\rho\}$.

· El primer paso consiste en trabajar con rebanadas $x_0 \times N$ y probar que si A es un abierto de $M \times N$ que contiene a la rebanada $x_0 \times N$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \times N \subseteq A$. Note que el "tubo" $B(x_0, r_0) \times N$ contiene a la rebanada $x_0 \times N$.

Sea $(U_\lambda \times V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $x_0 \times N$ por abiertos de la base $\mathcal{B}$.$^{(*)}$ Como $x_0 \times N$ y N son homeomorfos, se tiene que $x_0 \times N$ es compacto. Por lo cual podemos hallar $U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m} \times V_{\lambda_m}$ tales que

$$x_0 \times N \subseteq (U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (U_{\lambda_m} \times V_{\lambda_m})$$

$(*)$ y que además $U_\lambda \times V_\lambda \subseteq A \;\; \forall \lambda \in \Lambda$.



Sea $W = U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_m}$. Por ser W abierto y $x_0 \in W$, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x_0, r_0) \subseteq W$. Veamos ahora que el tubo $B(x_0, r_0) \times N$ está contenido en A.

Sea $(x, y) \in B(x_0, r_0) \times N$. y considere $(x_0, y) \in x_0 \times N$. Luego $(x_0, y) \in (U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (U_{\lambda_m} \times V_{\lambda_m})$, de donde $(x_0, y) \in U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i}$ para algún $i = 1, \ldots, m$. Por otro lado, $x \in B(x_0, r_0) \subseteq W \subseteq U_{\lambda_i}$, por lo cual $(x, y) \in U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i}$. Como $U_{\lambda_i} \times V_{\lambda_i} \subseteq A$ se concluye que

$$x_0 \times N \subseteq B(x_0, r_0) \times N \subseteq A.$$

- Ahora estamos en condiciones de probar que de todo cubrimiento abierto de $M \times N$ se puede extraer un subcubrimiento finito. Sea $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $M \times N$. Para cada $x \in M$, considere la rebanada $x \times N$. Como $x \times N$ es compacto y $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ cubre a $x \times N$, existe un subcubrimiento finito de $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que cubre a $x \times N$, digamos $x \times N \subseteq A_{\lambda_1^x} \cup \cdots \cup A_{\lambda_m^x}$.

Sea $r_x > 0$ tal que

$$x \times N \subseteq B(x, r_x) \times N \subseteq A_{\lambda_1^x} \cup \cdots \cup A_{\lambda_m^x} .$$

Por otro lado, $(B(x, r_x))_{x \in M}$ es un cubrimiento de M por bolas abiertas. Al ser M compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in M$ tales que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$$

Así, $$M \times N = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r_{x_i}) \times N \right) = \left(A_{\lambda_1^{x_1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_{m_1}^{x_1}} \right) \cup \cdots \cup \left(A_{\lambda_1^{x_n}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_{m_n}^{x_n}} \right),$$

de donde existe una subcolección finita de $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que cubre a $M \times N$. $\blacksquare$

Ejemplo:

1) Cubo unitario abierto de dimensión n.

   $C = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ (n veces) es compacto en $\mathbb{R}^n$.

2) Toro de dimensión 2:

   $T = S^1 \times S^1$ es compacto en $\mathbb{R}^3$.