Ejercicio 2 (25 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$.

a) Calcular los residuos en cada una de sus singularidades.

b) Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2+1} dx$

Lema 2 ***Lema de Jordan.***

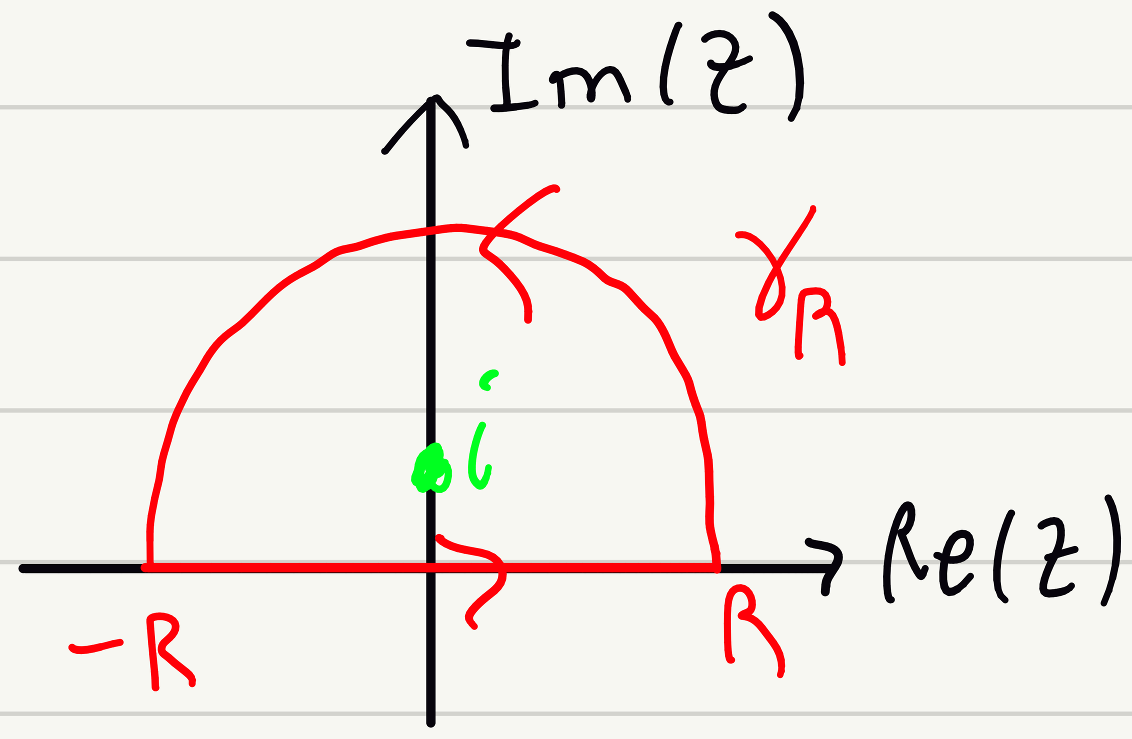
Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ *entonces:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z) dz = 0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = Re^{it}, t \in [0, \pi]$.

$$g(z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow \lim_{z\to+\infty} g(z) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 0$$



$$\gamma_R = [-R,R]\cdot\Gamma_R$$

$$\Gamma_R(t) = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i)$$

Teorema de los residuos

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i}\,\cancel{(-i)}}{\cancel{2}e} = \frac{\pi}{e} = \mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_R} F\right) = \int_{\gamma_R} \mathrm{Re}(F)$$

Por otro lado, $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f = \cancelto{0}{\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} F} + \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} F$

$$\int_{[-R,R]} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{e}$$

Ejercicio 3

1. Hallar todas las funciones holomorfas f y g, definidas en una región que contenga a $z = 0$ en su interior y que cumplen las ecuaciones respectivas (1) y determinar dominios maximales en que estén definidas.[1]

$$f(2^{-n}) = \frac{8^{-n}}{(1-2^{-n})^4} \qquad g(in^{-2}) = e^{n^{-2}} \tag{1}$$

$$f(2^{-n}) = \frac{(2^3)^{-n}}{(1-2^{-n})^4} = \frac{(2^{-n})^3}{(1-2^{-n})^4} \Rightarrow f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^4}$$

2. Expandir en desarrollo de series de potencia en 0 de las funciones holomorfas f y g y hallar sus radios de convergencia.

3. Consideremos la circunferencia de centro 1 y radio 1 parametrizada por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Para las funciones f y g calcular las siguientes integrales:

$$\int_\gamma (1-z)^3 f(z)\, dz \qquad \int_\gamma g(z)\, dz$$

$$f(z) = z^3 \frac{1}{(1-z)^4} = z^3 \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{1-z}\right)'''$$

$$= \frac{z^3}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)''' = \frac{z^3}{6}\left(\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, z^{n-3}\right)$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} z^n$$

Fórmula de Cauchy

$$\int_\gamma (1-z)^3 f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{z^3}{1-z}\, dz \overset{\downarrow}{=} -2\pi i \; z^3\Big|_{z=1} = -2\pi i$$

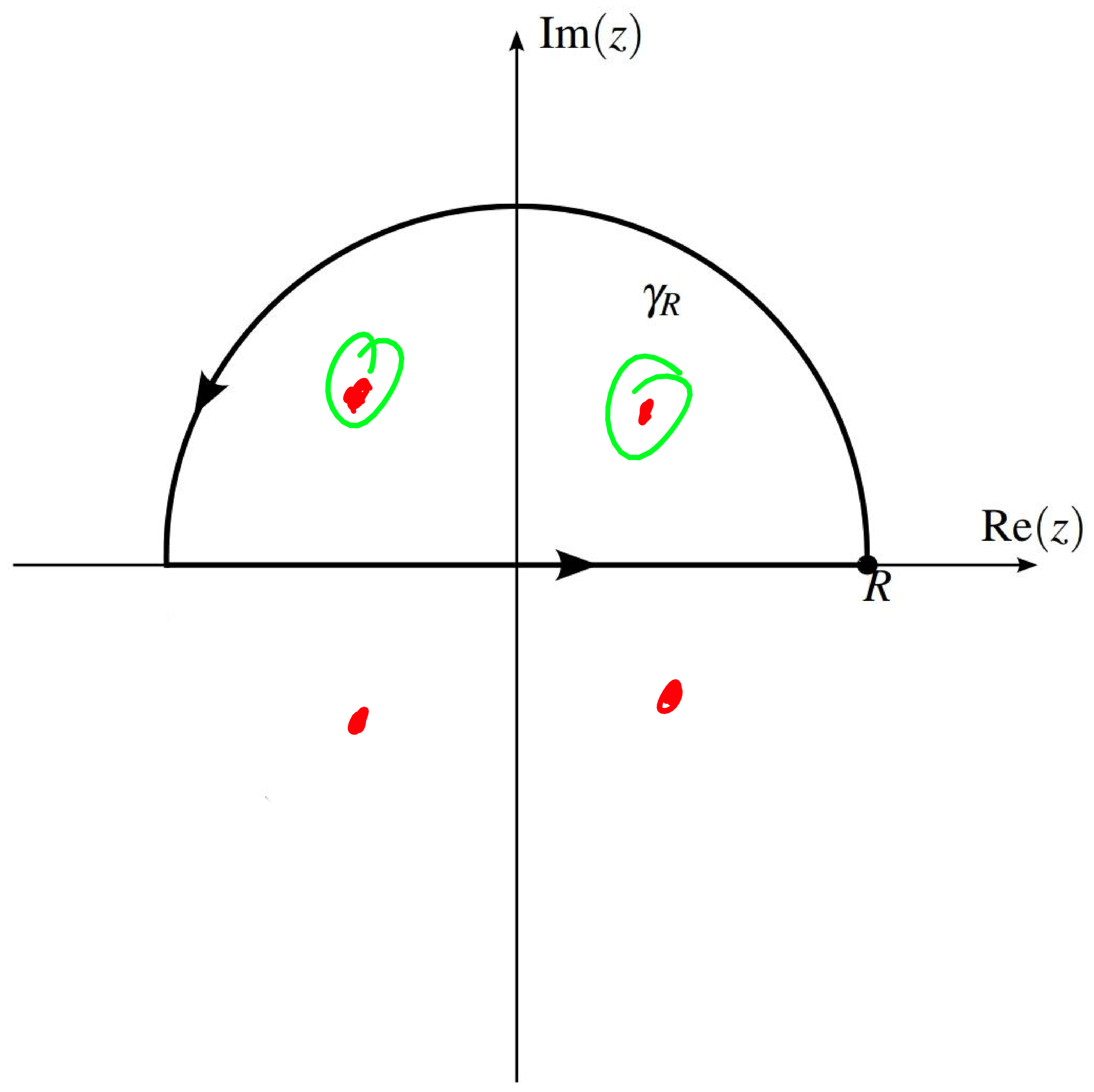
$$g(in^{-2}) = e^{n^{-2}} = e^{-i(in^{-2})} \Rightarrow f(z) = e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{n!} z^n$$

Ejercicio 1

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$,

1. Clasificar las singularidades de f: tipo de singularidad y en caso de ser polos el orden.
2. Calcular $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ donde γ_R es la curva de la figura, con $R > 2$.



3. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

$1 + z^4 = (z^2)^2 - i^2$

$= (z^2 - i)(z^2 + i) =$

$(z^2 - (e^{i\pi/4})^2)(z^2 - (ie^{i\pi/4})^2)$

$e^{i3\pi/4}$

$= (z - e^{i\pi/4})(z + e^{i\pi/4})$

$(z - e^{i3\pi/4})(z + e^{i3\pi/4})$

Ejercicio 4

Consideremos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transformación de Möbius tal que $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$ y $T(-1) = -1$.

1. Sea C una circunferencia cualquiera. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $T(C)$ sea una recta.

$0 = T^{-1}(\infty) \in \mathcal{C}$

2. Definimos el semi-espacio superior como $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m(z) > 0\}$, probar que $T(\mathbb{H}) =$ [redacted]. $-\mathbb{H}$

$T(z) = \frac{z-1}{-2z}$ $\qquad T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $\qquad \{-1, 0, 1\} \mapsto \{-1, 0, \infty\}$

$T(i) = \frac{i-1}{-2i} = \frac{i^2 - i}{2} = -\frac{(1+i)}{2} \Rightarrow \mathcal{I}m(T(i)) = -\frac{1}{2} < 0$

3. Hallar el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |T(z)| = 1\}$.

$T(-1) = -1$

$T(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{-2z} = 1 \Leftrightarrow z - 1 = -2z \Leftrightarrow 3z = 1 \Leftrightarrow z = 1/3$

$T(z) = i \Leftrightarrow z - 1 = -2iz \Leftrightarrow (1+2i)z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1+2i}$

$= \frac{1-2i}{5}$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

-1: $(-1-h)^2+(0-k)^2=r^2 \Rightarrow (1+h)^2+k^2=r^2$

$\frac{1}{3}$: $(1/3-h)^2+k^2=r^2$

$(1+h)^2=(1/3-h)^2 \Leftrightarrow$

$1+2h+\cancel{h^2}=\frac{1}{9}-\frac{2h}{3}+\cancel{h^2}$

$\frac{1-2i}{5}$: $\left(\frac{1}{5}-h\right)^2+\left(\frac{-2}{5}-k\right)^2=r^2$

$\frac{-\cancel{8}}{9}=\frac{\cancel{8}h}{3} \Leftrightarrow h=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{8}{15}\right)^2+\left(\frac{-2}{5}-k\right)^2}=r^2=\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2+k^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{8}{15}\right)^2+\frac{4}{25}+\frac{4k}{5}+\cancel{k^2}=\frac{4}{9}+\cancel{k^2}$

$\Rightarrow k=\dots \Rightarrow r=\dots$