Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2024

Primer parcial

30 de abril de 2024 | 1

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas a las preguntas de MÚLTIPLE OPCIÓN							
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

Para cada ejercicio, hay una y sólo una opción que es correcta.

Además de llenar la tabla de arriba, hay que llenar la hoja de scanner. **En caso de haber alguna discrepancia entre lo llenado en la tabla y lo llenado en la hoja de scanner, serán tenidas en cuenta las respuestas en la hoja de scanner.**

La duración del parcial es de 3 horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

Se consideran dos subconjuntos A y B del intervalo $(0, +\infty)$ que cumplen las siguientes condiciones:

- $1 \in A \cap B$
- $\forall x \in A\ \exists y \in A$ tal que $y < x$
- $\forall x \in B\ \forall y > x,\ y \in B$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) A y B tienen máximo y mínimo.

(B) A tiene ínfimo pero no mínimo y B no tiene supremo.

(C) A tiene mínimo y B no tiene supremo.

(D) A tiene ínfimo pero no mínimo y B tiene máximo.

(E) A tiene ínfimo pero no mínimo, y B tiene supremo pero no máximo.

(F) A y B tienen supremo e ínfimo pero no mínimo ni máximo.

Ejercicio 2

Sean f_a y g dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = x^2$, $f_a(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{si } x < a \\ x + 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$.

El valor de a que hace que la función $g \circ f_a$ sea continua es:

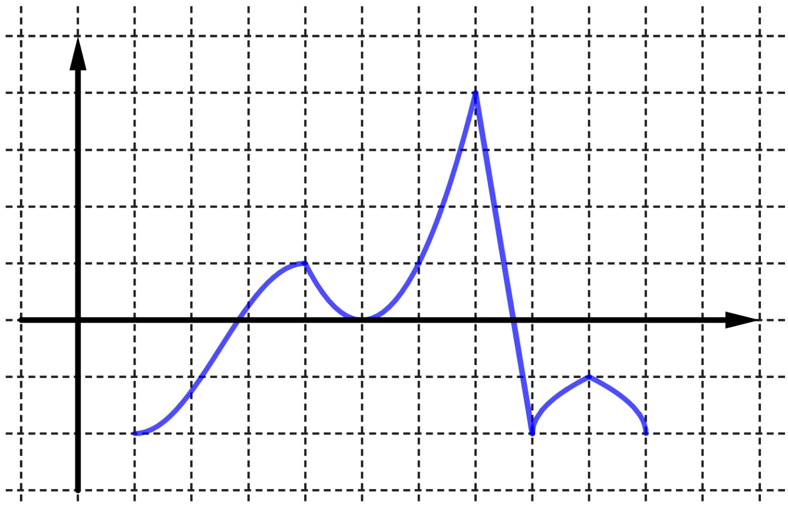
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

(F) $g \circ f_a$ no es continua para ningún valor de a.

Ejercicio 3

Sea $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$ la función cuyo bosquejo se muestra en la siguiente figura. Cada cuadrado tiene lado 1.

Para la partición $P = \{1, 5, 8, 10\}$ del intervalo $[1, 10]$ el valor de $S^*(f, P)$ (suma superior de f para la particion P) es:



(A) 14

(B) 4

(C) 12

(D) 18

(E) 20

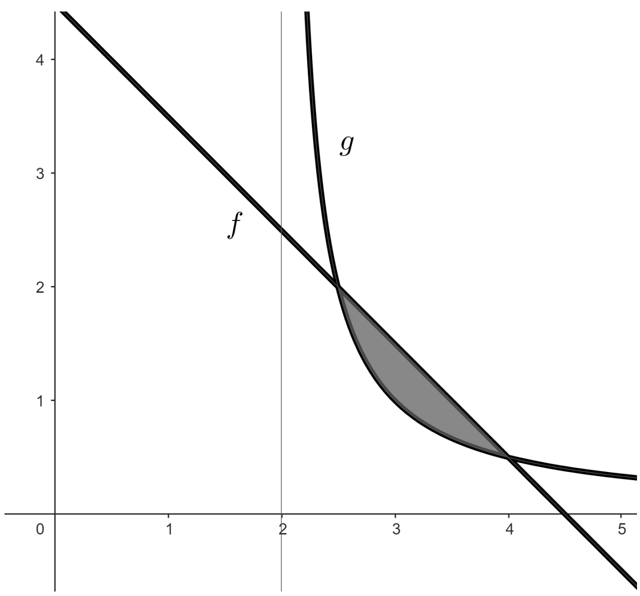
(F) 10

Ejercicio 4

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = -x + \frac{9}{2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)}.$$

Indicar cuál es el área de la figura delimitada por las gráficas de f y g, que corresponde a la zona gris en la imagen.



(A) $\frac{13}{4} - \log(2)$

(B) $\frac{15}{8} - \log(4)$

(C) $\frac{13}{4} + \log(2)$

(D) $\frac{15}{4} + \log(2)$

(E) $\frac{13}{4} - \log(4)$

(F) $\frac{15}{4} - \log(2)$

Se recuerdan las siguientes propiedades del logaritmo:

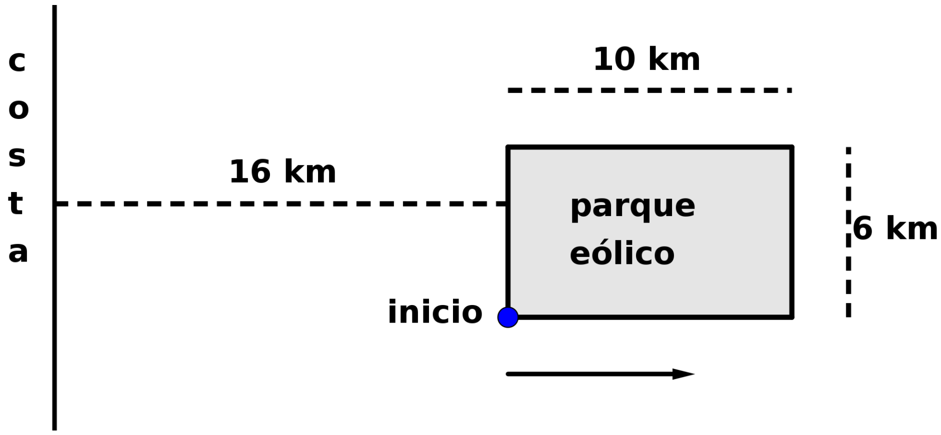
- $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$
- $-\log(a) = \log(1/a)$
- $\log(a^n) = n\log(a)$

Ejercicio 5

El rectángulo de la figura representa un parque eólico que se encuentra sobre una plataforma marina. Se desea hacer un estudio marítimo en su perímetro.

Dicho parque se encuentra a 16 km de la costa y, a grandes rasgos, tiene una forma rectangular de 10km por 6 km.

Un pequeño dron recorrerá el perímetro en el sentido que se muestra en la imagen, haciendo ciertas mediciones. Su rapidez es constante, de 2km por hora.



Si $f(t)$ es la distancia a la costa en kilómetros en el instante t, la función $f(t)$ es:

(A) $f(t) = 16 + 2t$ para $t \in [0, 16]$

(B) $f(t) = \begin{cases} 16 + 2t & \text{si } t \in [0, 8] \\ 32 - 2(t - 8) & \text{si } t \in [8, 16] \end{cases}$

(C) $f(t) = \begin{cases} 16 + 2t & \text{si } t \in [0, 5] \\ 26 & \text{si } t \in [5, 8] \\ 26 - 2(t - 8) & \text{si } t \in [8, 13] \\ 16 & \text{si } t \in [13, 16] \end{cases}$

(D) $f(t) = 16 + t$ para $t \in [0, 32]$

(E) $f(t) = \begin{cases} 16 + t & \text{si } t \in [0, 16] \\ 32 - (t - 16) & \text{si } t \in [16, 32] \end{cases}$

(F) $f(t) = \begin{cases} 16 + t & \text{si } t \in [0, 10] \\ 26 & \text{si } t \in [10, 16] \\ 26 - (t - 16) & \text{si } t \in [16, 26] \\ 16 & \text{si } t \in [26, 32] \end{cases}$

Ejercicio 6

Consideremos la ecuación
$$x^3 - x + 3 = 0$$
Indicar para cuál de los siguientes valores de $n \in \mathbb{Z}$ hay una solución en el intervalo $[n, n+1]$.

(A) -1

(B) -2

(C) -3

(D) 1

(E) 2

(F) 3

Ejercicio 7

Consideremos una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada de la cual sabemos lo siguiente:

- Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P del intervalo $[0,1]$ tal que
$$S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon.$$
- Para toda partición Q del intervalo $[0,1]$,
$$S^*(f,Q) > 5.$$
- Existe una partición R del intervalo $[0,1]$ tal que
$$S_*(f,R) < 3.$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) f no es integrable y $f(x) > 5$ para todo $x \in [0,1]$.

(B) f es integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 3$.

(C) f no es integrable y existe un $x \in [0,1]$ tal que $f(x) < 3$.

(D) f es integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 5$.

(E) f es integrable y $3 < \int_0^1 f(x)\,dx < 5$.

(F) f no es integrable y existen dos puntos $x, y \in [0,1]$ tales que $f(x) - f(y) \geq 2$.

Se recuerda que:

- $S^*(f, P)$ es la suma superior de la función f respecto de la partición P.
- $S_*(f, P)$ es la suma inferior de la función f respecto de la partición P.

Ejercicio 8

Consideremos la función parte entera, que está definida en $\mathbb{R}$ por

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}.$$

Esta función es continua en el punto 3,8. Es decir,

$$\lim_{x \to 3{,}8} \lfloor x \rfloor = \lfloor 3{,}8 \rfloor.$$

Para $\varepsilon = 0{,}5$, sabemos que

existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E^*(3{,}8, \delta)$ se cumple que $\lfloor x \rfloor \in E(\lfloor 3{,}8 \rfloor, \varepsilon)$.

Indicar el *máximo* valor de δ que cumple con lo que dice el recuadro.

(A) $\delta = 0,1$ (B) $\delta = 0,2$ (C) $\delta = 0,5$ (D) $\delta = 0,8$ (E) $\delta = 1$

(F) Ningún valor de δ cumple con lo que dice el recuadro.

Se recuerda que

- $E(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ es el entorno de centro x_0 y radio r.
- $E^*(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$ es el entorno reducido de centro x_0 y radio r.
