Universidad de la República **29 de abril de 2024**

Facultad de Ingeniería-IMERL

PRIMER PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 20 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1.25 puntos, no respuesta: 0 punto.
Colocar las respuestas en el siguiente cuadro.

1	2	3	4

Ejercicio 1

Una centralita telefónica recibe un número de llamadas por hora que puede ser modelado por una variable aleatoria X con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 7$. Si en una hora se reciben al menos 3 llamadas ¿cuál es la probabilidad de que en esa hora se reciban a lo sumo 5 llamadas?

(A) 0,218.

(B) 0,279.

(C) 0,226.

(D) 0,296.

(E) 0,361.

Ejercicio 2

Una caja a la que le llamaremos A contiene 4 bolillas blancas y 5 negras. Una segunda caja a la que le llamaremos B contiene 4 bolillas blancas y 3 negras. Se extraen al azar de manera independiente una bolilla de la caja A y una bolilla de la B. La bolilla extraída de la caja A se la coloca en la B mientras que la bolilla extraída de la caja B se la coloca en la caja A. Luego de ese intercambio se extrae una bolilla de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bolilla sea blanca?

(A) 5/7.

(B) 4/7.

(C) 0,272.

(D) 0,553.

(E) 3/7.

Ejercicio 3

Se consideran 3 sucesos A, B, C en determinado espacio de probabilidad tales que:

(i) A y $B \cap C$ son independientes.

(ii) $P(A) = 1/2$, $P(C) = \frac{3}{10}$.

(iii) Si ocurrió A la probabilidad de que ocurra B es $1/5$.

(iv) La probabilidad de que ocurran al menos uno de los sucesos A y C es $13/20$.

Entonces la probabilidad de que ocurran al menos dos de los 3 sucesos A, B, C es igual a

(A) 1/5.

(B) 1/4.

(C) 1/3.

(D) 1/10.

(E) 3/20.

Ejercicio 4

Se extraen simultáneamente 3 bolillas de un bolillero que contiene los números del 1 al 20.

Hallar la probabilidad de que no salgan los 3 números consecutivos (sin importar el orden en que se observan).

(A) 0,487.

(B) 0,984.

(C) 3/20.

(D) 0,323.

(E) 0,454.

Ejercicios de desarrollo (Total: 20 puntos)

Ejercicio 1

Se considera una variable aleatoria X con distribución exponencial de la cual se sabe que $P(X \geq 0{,}231) = P(X < 0{,}231)$. Hallar $P(X > 0{,}5)$.

Ejercicio 2

X e Y son dos variables aleatorias definidas en mismo espacio de probabilidad que son independientes y tales que X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,3)$ mientras que Y distribuye uniforme en el intervalo $(0,1)$. Hallar $P(Y < X/2)$.

Ejercicio 3

Un juego consiste en lanzar dos monedas equilibradas, una dorada y otra plateada, hasta que aparece cara en ambas simultáneamente. Se considera la variable aleatoria X = número de lanzamientos realizados.

1. Hallar la función de probabilidad puntual p_X.
2. Si se realizan 4 de estos juegos independientes, calcular la probabilidad que que por lo menos 2 (de entre los 4 juegos) terminan antes del tercer lanzamiento.

Ejercicio 4

Consideramos la función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ kx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

1. Hallar k.
2. Hallar $F_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Sabemos que $P\left(X=x\right)=\frac{e^{-7}7^{x}}{x!}$ para $x=0,1,2,.....$

La probabilidad buscada es

$$P\left(X\leq 5/X\geq 3\right)=\frac{P\left(3\leq X\leq 5\right)}{P\left(X\geq 3\right)}=\frac{P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)}{1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)}=$$

$$\frac{\frac{e^{-7}7^{5}}{5!}+\frac{e^{-7}7^{4}}{4!}+\frac{e^{-7}7^{3}}{3!}}{1-e^{-7}-\frac{e^{-7}7}{1!}-\frac{e^{-7}7^{2}}{2!}}=0{,}279.$$

La opción correcta es B.

Ejercicio 2

Se sugiere hacer un árbol para visualizar más fácilmente.

$$P\left(2^{o}\text{ b de }B\right)=\frac{4}{9}\frac{4}{7}\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{5}{7}+\frac{5}{9}\frac{4}{7}\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\frac{3}{7}\frac{4}{7}=0{,}553.$$

La opción correcta es D.

Ejercicio 3

Queremos hallar $P\left((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right).$ Aplicando la fórmula de la unión de 3 sucesos tenemos que

$$P\left((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap C\right)+P\left(B\cap C\right)-2P\left(A\cap B\cap C\right)\overset{(i)}{=}$$

$$P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap C\right)+P\left(B\cap C\right)-2P\left(A\right)P(B\cap C)\overset{(ii)}{=}P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap C\right)=(*)\,.$$

De (iii) deducimos que $P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=2P\left(A\cap B\right)=1/5$ por lo que $P\left(A\cap B\right)=1/10.$

De (iv) deducimos que $P\left(A\cup C\right)=13/20$ o sea que $P(A)+P(C)-P(A\cap C)=1/2+3/10-P(A\cap C)=13/20$ de donde se deduce que $P(A\cap C)=3/20.$

Entonces

$$P\left((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right)=(*)=\frac{1}{10}+\frac{3}{20}=\frac{1}{4}.$$

La opción correcta es B.

Otra forma.

Le llamamos $x=P\left(A\cap B\cap C^{c}\right),\, y=P\left(A\cap B^{c}\cap C\right),\, z=P\left(A^{c}\cap B\cap C\right),\, t=P\left(A\cap B\cap C\right),$ queremos hallar el valor de $x+y+z+t.$

De la condición (iii) tenemos que $P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\overset{(ii)}{=}2P\left(A\cap B\right)=1/5$ por lo que $P\left(A\cap B\right)=1/10$, lo cual implica que $x+t=1/10.$

De la condición (iv) tenemos que $P(A \cup C) = 13/20$, o sea que $P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 13/20$ entonces $1/2 + 3/10 - P(A \cap C) = 13/20$ de donde se deduce que $P(A \cap C) = 3/20$ lo que implica que $y + t = 3/20$.

La condición (i) significa que $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \cap C) = 2P(B \cap C)$ es decir que $t = 2(z + t)$ lo que equivale a la condición $z = t$.

Entonces

$$x + y + z + t = (x + t) + (y + z) = 1/10 + 13/20 = 1/4.$$

Ejercicio 4

Si definimos $A =$"no salen los 3 números consecutivos", calcularemos la probabilidad de $A^c =$"salen los 3 números consecutivos".

Los casos posibles son $\binom{20}{3} = 1140$.

Los casos favorables para A^c son 18 (que son $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), ..., (18, 19, 20)$).

Entonces $P(A) = 1 - \frac{18}{1140} = \frac{187}{190} = 0{,}984\,21$.

La opción correcta es B.

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1

Sabemos que $1 - F_X(0{,}231) = F_X(0{,}231)$ por lo que $F_X(0{,}231) = 1/2$, es decir que $1 - e^{-0{,}231\lambda} = 1/2$, entonces $-0{,}231\lambda = \ln(1/2)$, entonces $\lambda = \ln(2)/0{,}231 = 3$.

La probabilidad buscada es

$$P(X > 0{,}5) = 1 - F_X(0{,}5) = e^{-1{,}5} = 0{,}2231.$$

Ejercicio 2

Sabemos que $f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/3 & \text{si} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si} & \text{no} \end{array} \right.$ y $f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si} & \text{no} \end{array} \right.$. Al ser X e Y independientes se tiene que $f_{X,Y}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/3 & \text{si} & 0 < x < 3,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si} & \text{no} \end{array} \right.$.

Entonces, si le llamamos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < x/2\}$, tenemos que (se sugiere hacer el dibujo de la región a integrar para ver los extremos de integración).

$$P(Y < X/2) = \int\int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dy \int_{2y}^3 dx = 2/3.$$

Observación. Puede calcularse también a través de áreas de triángulos, sin necesidad de integrar.

Ejercicio 3

1. $X \sim$Geo$(p = 1/4)$ ya que realizamos pruebas de Bernoulli independientes, hasta obtener el primer éxito, siendo las posibilidades (para cada una de las pruebas) $\{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$ por lo que la probabilidad de éxito es $p = 1/4$. Entonces la función de probabilidad de X es

$$p_X(x) = p(1 - p)^{x-1} = (1/4)\,(3/4)^{x-1} \text{ para } x = 1, 2, 3, , ...$$

2. Definimos Y =çantidad de juegos (entre los 4) en que el juego termina antes del tercer lanzamiento", entonces $Y \sim \text{Bin}(n=4, p=7/16)$ ya que el éxito en cada prueba es $p = P(X<3) = P(X=1) + P(X=2) = 1/4 + (1/4)(3/4) = \frac{7}{16}$. Entonces

$$p_Y(y) = \binom{4}{y}\left(\frac{7}{16}\right)^y\left(\frac{9}{16}\right)^{4-y} \text{ siendo } y = 0,1,2,3,4.$$

Entonces la probabilidad buscada es $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^4 - 4\left(\frac{7}{16}\right)\left(\frac{9}{16}\right)^3 = 0{,}5884$.

Ejercicio 4

1. Planteamos $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X = 1$, lo que equivale a $\int_0^2 kxdx + \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = ... = 2k + 1/2 = 1$ por lo que despejando k se obtiene que $k = 1/4$.

2.
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x tdt/4 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^2 tdt/4 + \int_2^x \frac{dt}{t^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} =$$
$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2/8 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - 1/x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}.$$