Matemática Inicial
Primer Parcial, Abril de 2024.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (8 puntos)

1. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la ecuación:*
$$3^{x^2-18} = \frac{2}{18}.$$
2. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la ecuación:*
$$\log(x) + \log(3x-1) - \log(x+5) = 0.$$

Ejercicio 2 (7 puntos)

1. *Hallar* $S \subset \mathbb{R}$ *el conjunto solución de la inecuación*
$$|3x-6| > -x+5.$$
2. *Determinar* $S \cap [0,4]$, *siendo* S *el conjunto del ítem anterior.*

Ejercicio 3 (7 puntos)

1. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la inecuación:*
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0.$$
Justificar cada paso.
2. *Resolver en* $[0, 2\pi)$ *la inecuación del ítem anterior.*

Ejercicio 4 (8 puntos) *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *se considera la siguente implicación:*

Si n *termina en el dígito* 8, *entonces* n *es múltiplo de* 4.

1. *Determinar si la implicación anterior es verdadera. Justificar.*
2. *Enunciar la negación de la implicación. (Nota: plantear el enunciado de forma afirmativa, es decir, no puede empezar de la forma "No...")*
3. *Enunciar su contrarrecíproco.*

Ejercicio 1.

1. Notar que $\frac{2}{18} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$. Por tanto la ecuación queda $3^{x^2-18} = 3^{-2}$. Como en ambos miembros se tiene la misma base, se verifica la ecuación si y sólo si los exponentes son iguales, es decir si y sólo si $x^2 - 18 = -2$. Resolviendo la ecuación anterior obtenemos que el conjunto solución es $S = \{-4, 4\}$.

2. Estudiamos primeramente el dominio de la ecuación. Se debe cumplir que $x > 0$, $3x - 1 > 0$ y $x + 5 > 0$, por tanto el dominio D es el conjunto donde se cumplen las tres condiciones simultaneamente, es decir, $(0, +\infty) \cap (\frac{1}{3}, +\infty) \cap (-5, +\infty)$. Obtenemos entonces $D = (\frac{1}{3}, +\infty)$.

   Con esto, para $x \in D$,

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(3x-1) - \log(x+5) &= 0 \Leftrightarrow \\ \log\left(\frac{x(3x-1)}{x+5}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x(3x-1)}{x+5} &= 1 \Leftrightarrow \\ 3x^2 - 2x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

   En D la ecuación anterior tiene solución $S = \{\frac{5}{3}\}$ pues el otro número que verifica la ecuación es -1 y $-1 \notin D$.

Ejercicio 2.

1. Analicemos primeramente el miembro de la izquierda de la inecuación para determinar cómo queda la misma sin valor absoluto. Notar que $3x - 6 \geq 0$ si y sólo si $x \geq 2$. Por tanto la inecuación se puede plantear de la siguiente manera: $\begin{cases} 3x - 6 > -x + 5 & \text{si } x \geq 2 \\ -3x + 6 > -x + 5 & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Resolvemos entonces estas dos inecuaciones:

$$3x - 6 > -x + 5 \Leftrightarrow 4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$$

   Como $\frac{11}{4} > 2$, entonces $S_1 = (\frac{11}{4}, +\infty)$. Por otro lado,

$$-3x + 6 > -x + 5 \Leftrightarrow 1 > 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} > x$$

   Como $\frac{1}{2} < 2$, entonces $S_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$.
   El conjunto solución que obtenemos es $S = S_1 \cup S_2$.

2. Además $S \cap [0, 4] = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{11}{4}, 4]$

Ejercicio 3.
Notar que en $\mathbb{R}$, se tiene que $\sin(\alpha) > 0$ si y sólo si

$$\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + \pi).$$

Por tanto en este caso concreto

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \pi \Leftrightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5}{6}\pi$$

1. Por tanto en $\mathbb{R}$ la solución que obtenemos es

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5}{6}).$$

2. En esta parte debemos efectuar la intersección de S con el intervalo $[0, 2\pi)$. Observar que para $k \neq 0, 1$ la intersección del intervalo $(2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5}{6})$ con $[0, 2\pi)$ es vacía. Por tanto veamos que sucede para $k = 0, 1$. Si $k = 0$, entonces $(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cap [0, 2\pi) = [0, \frac{5\pi}{6})$. Por otro lado si $k = 1$, entonces $(2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5}{6}) \cap [0, 2\pi) = (\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$. En resumen obtenemos la solución

$$[0, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi).$$

Ejercicio 4.

1. Notar que para $n = 18$ la implicación es falsa pues 18 no es múltiplo de 4.
2. La negación se puede plantear de la siguiente forma: "Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ que termina en el dígito 8 tal que n_0 no es múltiplo de 4".
3. El contrarrecíproco queda de la siguiente manera: "Si n no es múltiplo de 4, entonces n no termina en el dígito 8."