Matemática Inicial
Primer Parcial, Abril de 2024.

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (8 puntos)

1. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la ecuación:*
$$2^{x^2-7} = \frac{3}{24}.$$
2. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la ecuación:*
$$\log(x) + \log(2x+1) - \log(-x+12) = 0.$$

Solución Ejercicio 1

1. El dominio de definición de la ecuación es $D = \mathbb{R}$.
$$2^{x^2-7} = \frac{3}{24} \Leftrightarrow 2^{x^2-7} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{x^2-7} = 2^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 7 = -3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$
El conjunto solución es entonces $S = \{-2, 2\}$.
2. El dominio de definición de la ecuación es el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que:
   - $x > 0$
   - $2x + 1 > 0$ es decir $x > -\frac{1}{2}$
   - $-x + 12 > 0$ es decir $x < 12$.

   Por lo tanto el dominio de definición de la ecuación es $D = (0, 12)$. Asumiendo que $x \in D$, y usando propiedades del logaritmo tenemos que
$$\log(x) + \log(2x+1) - \log(-x+12) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{x(2x+1)}{-x+12}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x+1)}{-x+12} = 1$$
$$\Leftrightarrow x(2x+1) = -x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$
   Hay otra solución de la ecuación de segundo grado, $x = -3$ pero no pertenece al dominio. El conjunto solución es entonces $S = \{2\}$.

Ejercicio 2 (7 puntos)

1. *Hallar* $S \subset \mathbb{R}$ *el conjunto solución de la inecuación*
$$|2x - 4| > -x + 3.$$
2. *Determinar* $S \cap [0, 4]$.

Solución Ejercicio 2

1. Por definición de valor absoluto tenemos que
$$|2x-4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } 2x - 4 \geq 0 \\ -2x + 4 & \text{si } 2x - 4 < 0 \end{cases}$$
   Esto es:
$$|2x-4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
   Separemos en casos entonces

- Para el caso en que $x \geq 2$, la inecuación resulta:

$$|2x-4| > -x+3 \Leftrightarrow 2x-4 > -x+3 \Leftrightarrow 3x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$$

Observando que $\frac{7}{3} > \frac{6}{3} = 2$, resulta que en este caso la solución es $S_1 = \left(\frac{7}{3}, \infty\right)$.

- Para el caso en que $x < 2$, la inecuación resulta:

$$|2x-4| > -x+3 \Leftrightarrow -2x+4 > -x+3 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Observando que $1 < 2$, resulta que en este caso la solución es $S_2 = (-\infty, 1)$.

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{7}{3}, \infty\right)$.

2. La intersección $S \cap [0,4] = [0,1) \cup (\frac{7}{3}, 4]$.

Ejercicio 3 (7 puntos) 1. *Resolver en* $\mathbb{R}$ *la inecuación:*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

Justificar cada paso.

2. *Resolver en* $[0, 2\pi)$ *la inecuación del item anterior.*

Solución Ejercicio 3

1. Recordar que $\sin(x) > 0$ para todo $x \in (0,\pi)$ y en todos intervalos que son de la forma $(0,\pi) + 2k\pi = (2k\pi, 2(k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

   Miremos entonces primero el intervalo $(0, pi)$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \in (0,\pi) \Leftrightarrow 0 < x + \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}.$$

   Por lo tanto la solución en $\mathbb{R}$ es el conjunto de la forma $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi = \left(\pi(2k - \frac{1}{3}), 2\pi(\frac{1}{3} + k\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. Para resolver la misma ecuación pero en $[0, 2\pi)$ tenemos que ver cuáles de los intervalos de la forma $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi = \left(\pi(2k - \frac{1}{3}), 2\pi(k + \frac{1}{3})\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ tienen intersección no vacía con $[0, 2pi)$.

   Analizemos los casos $k = 0, 1, -1$ primero:

   - Para $k = 0$ tenemos el intervalo $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ cuya intersección con $[0, 2\pi)$ es $[0, \frac{2\pi}{3})$.
   - Para $k = 1$ tenemos el intervalo $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$ cuya intersección con $[0, 2\pi)$ es $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$. Observar que para valor mayores a $k = 1$ la intersección es vacía porque el extremo izquierdo del intervalo ya es mayor que 2π.
   - Para $k = -1$ tenemos el intervalo $\left(-\frac{7}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi\right)$ que tiene intersección vacía con el intervalo $[0, 2\pi)$ (es fácil de ver ya que el extremo derecho $\frac{2\pi}{3}$ es menor que $2pi$). Por lo tanto para valores menores a $k = -1$ la intersección también será vacía.

   Por lo tanto la solución en $[0, 2\pi)$ es $[0, \frac{2\pi}{3}) \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.

Ejercicio 4 (8 puntos) *Dado $n \in \mathbb{N}$, se considera la siguiente afirmación:*

Si n termina en el dígito 6, entonces n es múltiplo de 3.

1. *Determinar si la implicación anterior es verdadera. Justificar.*
2. *Enunciar la negación de la afirmación. (nota: plantear el enunciado de forma afirmativa, es decir, no puede empezar de la forma "No…")*
3. *Enunciar su contrarrecíproco.*

Solución Ejercicio 4

1. La afirmación es falsa, el número $n = 16$ termina en el dígito 6 pero no es múltiplo de 3.
2. Existe $n \in \mathbb{N}$ que termina en el dígito 6 tal que no es múltiplo de 3.
3. Dado $n \in \mathbb{N}$, si n no es múltiplo de 3 entonces n no termina en el dígito 6.