Ej 7, 1er sem 2023

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}$$

$\boxed{\lfloor x\rfloor = \max\{n\in\mathbb{Z} : n\le x\}}$

$\lfloor 23{,}08\rfloor = 23$

¿Qué pasa para $x\in\mathbb{Z}^+$?

$x=\lfloor x\rfloor \Rightarrow x^2=\lfloor x\rfloor^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}=0$

Conclusión: si el límite existe, vale 0.

¿Qué pasa para $x=n{,}5=n+\frac12$, con $n\in\mathbb{Z}^+$?

$\left.\begin{array}{l} x^2=(n+\frac12)^2=n^2+n+\frac14 \\ \lfloor x\rfloor = n \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-\lfloor x\rfloor^2 = n^2+n+\frac14-n^2 =$

$= n+\frac14.$

$\frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x} \underset{x=n+\frac12}{=} \frac{n+1/4}{2(n+1/2)} = \frac{n+1/4}{2n+1}$

Cuando n es grande, como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1/4}{2x+1}=1/2,$$

$\frac{n+1/4}{2n+1}\approx\frac12.$

Volvamos a $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}$

1,5 2,5

0 1 2 3 2048…

En los x rojos, $\frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}=0$

En los x verdes, $\frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}\approx\frac12$ cuando x es muy grande.

Conclusión: $\nexists \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\lfloor x\rfloor^2}{2x}$.

Comentario: Para todo y,

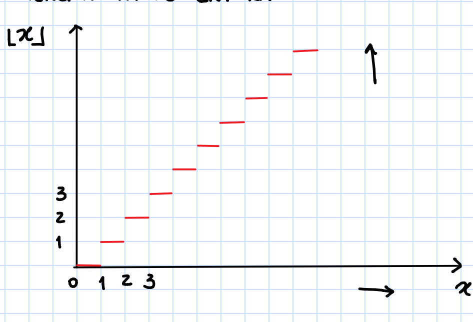
$0\le y-\lfloor y\rfloor<1.$

Entonces, para todo x,

$0\le x^2-\lfloor x^2\rfloor<1.$

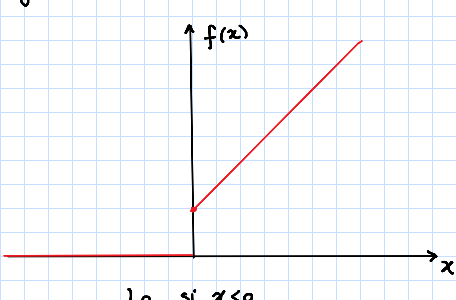
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\lfloor x^2\rfloor}{2x}=0.$ ACOT $\to+\infty$

FUNCIÓN PARTE ENTERA



$\lim_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor=+\infty.$

Ejercicio 6, 1er sem 2023.



$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x+1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

(A) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon)$

$x\in E(0,\delta)$ $\quad f(x)\in E(1,\varepsilon)$

$f(x)\in E(f(0),\varepsilon)$

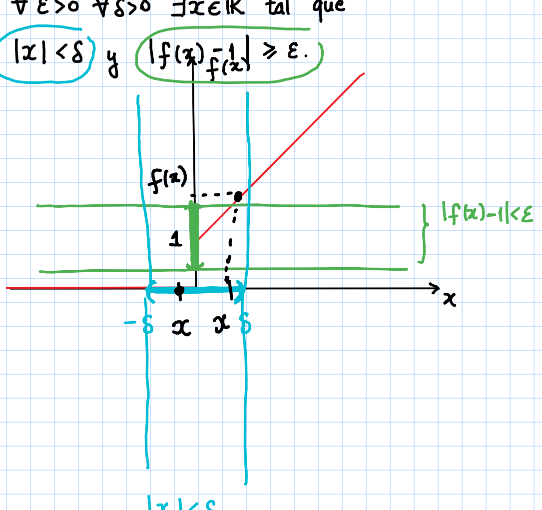
(A) dice

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ X

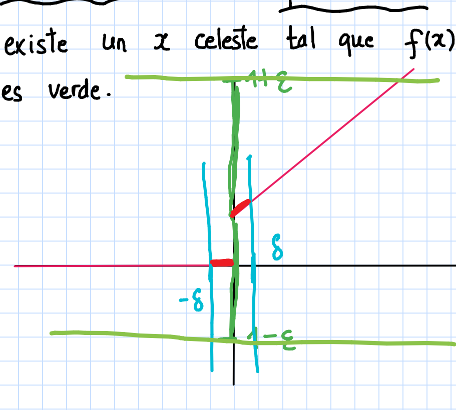
o "f es continua en 0".

(B) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ tal que

$|x|<\delta$ y $|f(x)-1|\ge\varepsilon$.



Para todo ε (verde) para todo δ (celeste) existe un x celeste tal que $f(x)$ no es verde.

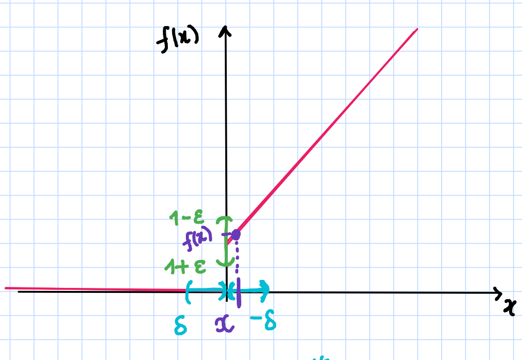


En el dibujo se ven un ε y un δ para los cuales no pasa que

$\exists x\in\mathbb{R}$ tal que $|x|<\delta$ y $|f(x)-1|\ge\varepsilon$.

(B) es falsa.

(D) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ tal que $0<|x|<\delta$ y $|f(x)-1|\le\varepsilon$. (V)



$0<|x|<\delta \Longleftrightarrow x\in E^*(0,\delta)=E(0,\delta)-\{0\}$

$E(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)$

$E^*(x_0,r)=E(x_0,r)-\{x_0\}=(x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r)$

Ej 2, 2018, 2do sem.

$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\lfloor 4x^2\rfloor.$

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx.$$

Obs: $x\in[-1,1]\Rightarrow x^2\in[0,1]\Rightarrow \underset{y.}{\underset{\parallel}{4x^2}}\in[0,4]$

$y\in[0,1)\Rightarrow\lfloor y\rfloor=0$ ✓

$y\in[1,2)\Rightarrow\lfloor y\rfloor=1$

$y\in[2,3)\Rightarrow\lfloor y\rfloor=2$

$y\in[3,4)\Rightarrow\lfloor y\rfloor=3$

$y=4\Rightarrow\lfloor y\rfloor=4$

$\boxed{y=4x^2}$

$0\le y<1 \Longleftrightarrow 0\le 4x^2<1\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 4x^2<1\Longleftrightarrow x^2<\frac14\Longleftrightarrow |x|<\frac12$

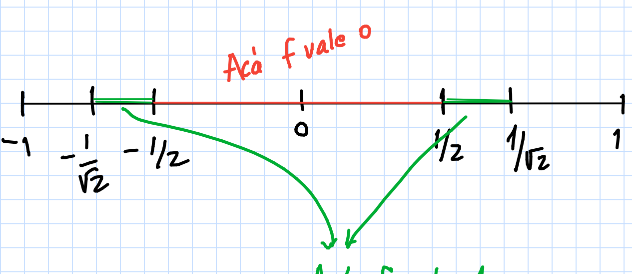
$\Longleftrightarrow x\in(-\frac12,\frac12).$

f vale 0 en $(-\frac12,\frac12)$.

$1\le y<2\Longleftrightarrow 1\le 4x^2<2\Longleftrightarrow$

$\frac14\le x^2<\frac12\Longleftrightarrow\frac12\le|x|<\frac1{\sqrt2}$

$\Longleftrightarrow x\in\underbrace{\left(-\frac1{\sqrt2},-\frac12\right]\cup\left[\frac12,\frac1{\sqrt2}\right)}_{\text{acá } f \text{ vale } 1}.$



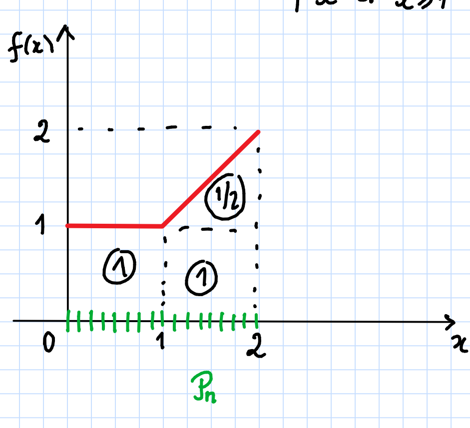
Acá f vale 1.
Son dos intervalos de longitud $\frac1{\sqrt2}-\frac12$.

$f(x)=\lfloor 4x^2\rfloor$

$\in[-1,1]$ $\quad\in[0,4]$

Ej. 3 2022, 1er sem.

$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<1\\ x & \text{si } x\ge1\end{cases}$



(A) $\inf_{n\in\mathbb{N}} S(f,P_n)=5/2$ ✓

$\parallel$

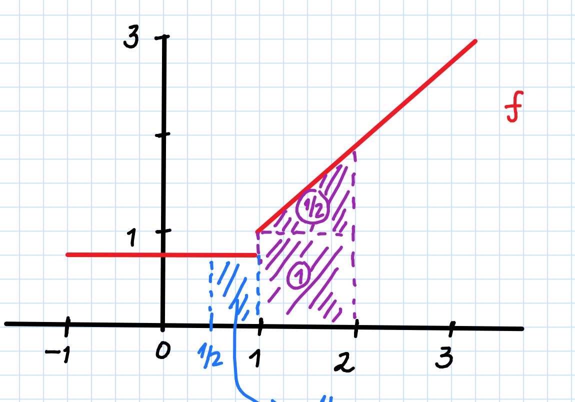
$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

P_n subdivide $[0,2]$ en n pedacitos iguales (de longitud $\frac2n$).

Ej 4 2022, 1er sem.

$f:[-1,3]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}3/4 & \text{si } x<1\\ x & \text{si } x\ge1.\end{cases}$



$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ $\qquad \int_1^{1/2}f=-\int_{1/2}^1 f=-\frac12\cdot\frac34$

(A) $F(1/2)=1$ X

(B) $F(2)=3/2$ ✓

(C) Creciente: $x<y\Rightarrow F(x)\le F(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow F(y)-F(x)\ge0$

$F(y)-F(x)=\int_1^y f-\int_1^x f=\int_x^y f\ge\frac34(y-x)>0$

(D) $F(1)=0.$

¿Hay otro x donde $F(x)=0$? ✓

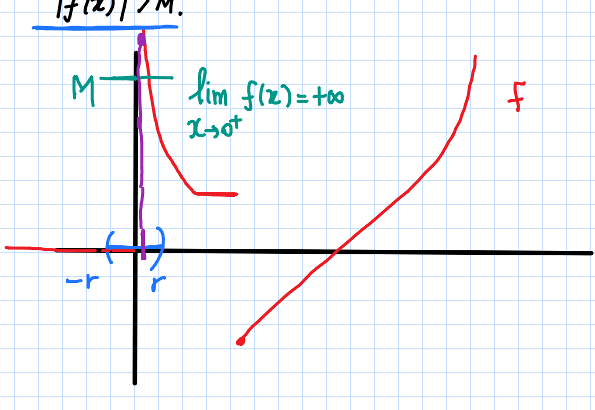
No, porque F es estrictamente creciente.

Calculemos F:

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\begin{cases}-\frac34(1-x)=\frac34(x-1) & \text{si } x<1\\ \frac{x^2}{2}-\frac12 & \text{si } x\ge1\end{cases}$

Ej. 1, af. 7.

$\forall r>0\ \forall M>0\ \exists x\in E(0,r)$ que cumple $|f(x)|>M$. (V)



Ej Pr 4.

$f(x)=\begin{cases}2\cos(x) & x\le\pi\\ ax^2+b & x>\pi\end{cases}$

¿Para qué valores de $a,b\in\mathbb{R}$ es continua?

Problema: Podría no ser continua en $x=\pi$.

$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=2\cos(\pi)=-2=f(\pi).$

$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=a\pi^2+b$

¿Para qué valores de a y b

$a\pi^2+b=-2$?

$a\pi^2+b=-2\Rightarrow b=-2-a\pi^2.$

Para todo $a\in\mathbb{R}$ existe un valor de b (que es $b=-2-a\pi^2$) de modo que f es continua.

$\{(a,b): f_{a,b}\text{ es cont}\}=\{(a,-2-a\pi^2): a\in\mathbb{R}\}$

Ej 8, 1er sem 2023.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y sobre t.q.

- $f(-5)>0$
- $f(0)<0$
- $f(1)=0$
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

inyectiva:

$x\ne y\Rightarrow f(x)\ne f(y)$

Sobreyectiva: $\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$.

$\boxed{D}$ f se anula en al menos 3 puntos

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ✓ (Weierstrass + f sobre)

hay una en estas condiciones que se anula en exactamente 3 puntos.