Práctico 8

completitud

1. Dada una isometría $f\colon M \to M$ y $x_0 \in M$ fijo, defina la sucesión (x_n) en M mediante la siguiente fórmula de recurrencia:
$$x_{n+1} := f(x_n) \text{ para cada } n \geq 1.$$
Si x_0 no es un punto fijo de f, demuestre que (x_n) no converge.

2. (a) Sea $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, donde $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_2$ son infinitos. Dada una sucesión (x_n) de un espacio métrico M, si existe $a \in M$ tal que
$$\lim_{n\in\mathbb{N}_1} x_n = a = \lim_{n\in\mathbb{N}_2} x_n,$$
demuestre que (x_n) converge a a.
   (b) Dé un ejemplo de una descomposición infinita $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \cdots$ y una sucesión (x_n) no convergente en M tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbb{N}_k$ es infinito y $\lim_{n\in\mathbb{N}_k} x_n = a$ para cierto $a \in M$.

3. (a) Dada (x_n) una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, sean (a_n) y (b_n) las sucesiones definidas por
$$a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \text{ y } b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$
Demuestre que (a_n) y (b_n) convergen. Tales valores de convergencia serán denotados por
$$a = \liminf x_n \text{ y } b = \limsup x_n.$$
   (b) Sean $f, g\colon \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ las funciones dadas por
$$f((x_n)) = \liminf x_n \text{ y } g((x_n)) = \limsup x_n.$$
Demuestre que f y g son continuas.

4. Sea S un subconjunto denso de un espacio métrico (M, d). Dada una sucesión (x_n) en M, supongamos que existe $x \in M$ tal que
$$\lim d(x_n, s) = d(x, s)$$
para todo $s \in S$. Demuestre que $\lim x_n = x$.

5. Sean d y d' dos métricas definidas sobre el mismo conjunto M. Demuestre que d es más fina que d' si, y solamente si, $x_n \to a$ (según d) implica que $x_n \to a$ (según d').

6. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de números reales positivos. Si (x_n) es una sucesión en un espacio métrico (M, d) tal que
$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$$
para todo n, demuestre que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

7. Sean $M_1, \dots, M_n$ subespacios completos de un espacio métrico M. Entonces $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ es un subespacio completo de M.

8. Demuestre que las componentes conexas de un espacio métrico completo son subespacios completos.

9. Sea $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia arbitraria de subespacios completos de un espacio métrico M. Demuestre que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un espacio métrico completo.

10. Sea $f\colon (M,d) \to (N,\rho)$ una función continua entre espacios métricos para la cual existe $c > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x,y)$$

para cualesquiera $x, y \in M$. Demuestre que $f(C)$ es un subespacio completo de N para todo $C \subseteq M$ subespacio completo de M. En particular, concluya que si M es completo, entonces F es una aplicación cerrada ($f(F)$ es cerrado en N para todo $F \subseteq M$ cerrado en M).