ESTRATO 04: COMPLETITUD

En esta parte del curso estudiaremos el concepto de espacios métricos completos. Para esto, el objeto central de análisis serán las sucesiones, específicamente las sucesiones de Cauchy. Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy dentro de él es convergente. Intuitivamente hablando, lo anterior significa que al espacio "no le faltan puntos". Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ no es completo, ya que le falta el punto π (o cualquier otro número irracional), en el sentido de que se puede construir una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que converja a π.

Hasta el momento hemos estudiado invariantes topológicos (propiedades que son preservadas por homeomorfismos). La completitud no es un invariante topológico, ya que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos, $\mathbb{R}$ es completo y $(0,1)$ no. Esta es una propiedad que refiere solamente a la métrica del espacio, y demostraremos que será un invariante isométrico (propiedad preservada por isometrías biyectivas).

Empecemos estas notas estudiando en detalle el concepto de sucesión y sus propiedades, analizando además varios ejemplos conocidos.

Sucesiones y convergencia

Sea (M,d) un espacio métrico.

Definición: Una sucesión en M es una función

$$x : \mathbb{N} \to M.$$

A cada valor $x(n)$, para $n \in \mathbb{N}$, se le denota como x_n.

Para referirnos a $x : \mathbb{N} \to M$ escribiremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o (x_n).

- (x_n) es **acotada** si existe $K \geq 0$ en $\mathbb{R}$ tal que
$$d(x_n, x_m) \leq K \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$
- (x_n) es **convergente** a un punto $a \in M$ si:
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Al punto a se le conoce como **límite de la sucesión**, y se denota así por $a = \lim_{n \to +\infty} x_n$ (o también por $a = \lim x_n$ o $x_n \to a$).

Si (x_n) no tiene límite, diremos que es **divergente**.

Ejemplos:

1) Dado $a \in M$, sea (x_n) dada por
$$x_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
A esta sucesión se le conoce como **sucesión constantemente igual a a**. Claramente, (x_n) es acotada y convergente con límite a.

2) En $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) considere
$$x_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Se tiene que (x_n) claramente es acotada, ya que
$$d(x_n, x_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ y } m \text{ tienen la misma paridad} \\ 1 & \text{si } n \text{ y } m \text{ tienen paridades distintas} \end{cases}$$
(x_n) no es convergente ya que alterna sus valores entre -1 y 1. Probemos esto formalmente. Supongamos que (x_n) sí tiene límite, al cual llamaremos a. Luego, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N \Rightarrow |(-1)^n - a| < \varepsilon/2$. Note que si $n, m \geq N$ entonces $|(-1)^n - (-1)^m| \leq |(-1)^n - a| + |(-1)^m - a| < \varepsilon$. Si tomamos n y m con paridades distintas y $\varepsilon = 1/2$, se obtiene una contradicción.

3) Sea $M=\mathbb{R}^2$ y $x_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$. Vemos que

$$x_n = \begin{cases} (1,0) & \text{si } n = 4k \text{ con } k\in\mathbb{N} \\ (0,1) & \text{si } n = 4k+1 \text{ con } k\in\mathbb{N} \\ (-1,0) & \text{si } n=4k+2 \text{ con } k\in\mathbb{N} \\ (0,-1) & \text{si } n=4k+3 \text{ con } k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Usando un argumento similar al del ejemplo anterior, se puede ver que (x_n) es acotada y diverge.

4) En $\mathbb{R}$, $x_n = n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ da lugar a una sucesión no acotada.

<u>Proposición (primeras propiedades de la convergencia)</u>: Las siguientes afirmaciones se cumplen para todo espacio métrico (M,d) y para toda sucesión (x_n) en M.

1) Si (x_n) es convergente, entonces (x_n) es acotada.
2) Si (x_n) es convergente y $a, b\in M$ son límites de (x_n), entonces $a=b$.

• <u>Demostración</u>:

1) Supongamos (x_n) convergente con $a = \lim x_n$.
Sea $\varepsilon>0$ fijo. Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq N \implies d(x_n, a) < \varepsilon/2.$$

Ahora, si $n, m\geq N$, tenemos por la desigualdad triangular que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por otro lado, considere el conjunto de valores $d(x_n, x_N)$ con $n<N$, y sea D el máximo de dicho conjunto.

Considere $n, m \in \mathbb{N}$.

(i) Si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(ii) Si $n < N$ y $m \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < D + \varepsilon$$

(iii) Si $n, m < N$, entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < 2D.$$

Si $K = \max\{\varepsilon, D + \varepsilon, 2D\}$, entonces (x_n) está acotada por K.

2) Sea $\varepsilon > 0$. $x_n \to a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, d(x_n, a) < \varepsilon/2 \;\; \forall n \geq N_1$

$x_n \to b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, d(x_n, b) < \varepsilon/2 \;\; \forall n \geq N_2$

Así, tomando $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, obtenemos

$$d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego, $d(a, b) < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0$.

$\therefore$ $d(a, b) = 0$, por lo cual $a = b$. ∎

También es importante tener en cuenta las subsucesiones de una sucesión a la hora de estudiar su convergencia.

<u>**Definición:**</u> Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico (M, d). Una subsucesión de (x_n) es una composición $x \circ \eta$ donde $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función est. creciente. Si denotamos $\eta_k = \eta(k) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$, entonces a $x \circ \eta$ podemos denotarla por (x_{n_k}).

<u>**Ejemplos:**</u>

1) Dada la sucesión $x_n = n$, tenemos que

$$x_{2k} = 2k \quad y \quad x_{2k+1} = 2k+1$$

son las subsucesiones formadas por los números pares e impares

2) Dada la sucesión $x_n = (-1)^n$, tenemos que (x_{2k}) es la subsucesión constantemente igual a 1, mientras que (x_{2k+1}) es la subsucesión constantemente igual a -1.

3) Para (x_n) dada por $x_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right)$, tenemos las siguientes subsucesiones constantes

$$x_{4k} = (1,0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+1} = (0,1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+2} = (-1,0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+3} = (0,-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notamos que una sucesión divergente puede contener varias subsucesiones convergentes a puntos diferentes del espacio métrico. Sin embargo, cuando la sucesión original es convergente, cualquier subsucesión dentro de ésta converge al mismo límite.

<u>Proposición</u>: Sea (M,d) un espacio métrico, (x_n) una sucesión en M, y $a \in M$. Entonces, (x_n) converge al punto a si, y solamente si, toda subsucesión de (x_n) converge al punto a.

• <u>Demostración</u>: La implicación $(\Leftarrow)$ es inmediata ya que (x_n) es una subsucesión de sí misma. Para probar $(\Rightarrow)$, sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). Considere $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Por otro lado, sea K el menor número natural tal que $n_K \geq N$ (el cual existe porque $k \mapsto n_k$ es estrictamente creciente). De nuevo, por ser $k \mapsto n_k$

estrictamente creciente, se tiene que

$$k \geq K \Rightarrow n_k \geq n_K \geq N \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$\therefore x_{n_k} \longrightarrow a.$ ■

Para finalizar esta sección, analicemos un poco el comportamiento de las sucesiones para ciertos tipos de espacios métricos, a saber, los productos cartesianos finitos y los espacios normados.

Proposición (convergencia en el producto cartesiano):

Sean $(M_1, d_1), \ldots, (M_m, d_m)$ espacios métricos. Considere el producto cartesiano

$$M = M_1 \times \cdots \times M_m$$

con la métrica $d_\infty : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_m(x_m, y_m)\}.$$

Para $(a_1, \ldots, a_m) \in M$ y una sucesión $(\vec{x}_n)$, con $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$, se tiene que

$$\vec{x}_n \longrightarrow (a_1, \ldots, a_m) \text{ si y solamente si } x_n^k \longrightarrow a_k$$

para cada $k = 1, \ldots, m$.

• **Demostración:**

($\Rightarrow$) Supongamos que $\vec{x}_n \longrightarrow (a_1, \ldots, a_m)$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d_\infty(\vec{x}_n, (a_1, \ldots, a_m)) < \varepsilon.$$

$$d_\infty(\vec{x}_n, (a_1, \ldots, a_m)) = \max\{d_1(x_n^1, a_1), \ldots, d_m(x_n^m, a_m)\} < \varepsilon$$

Para cada $k = 1, \ldots, m$, se tiene

$$d_k(x_n^k, a_k) \leq d_\infty((x_n^1, \ldots, x_n^m), (a_1, \ldots, a_m)).$$

Así, para cada $k = 1, \ldots, m$ y dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow d_k(x_n^k, a_k) < \varepsilon$, es decir, $x_n^k \to a_k$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que $x_n^k \to a_k$ para cada $k = 1, \ldots, m$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada k, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_k \Rightarrow d_k(x_n^k, a_k) < \varepsilon.$$

Tomando $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, se tiene que

$$n \geq N \Rightarrow d_k(x_n^k, a_k) < \varepsilon \quad \forall k = 1, \ldots, m.$$

Entonces, $\underbrace{\max\{d_1(x_n^1, a_1), \ldots, d_m(x_n^m, a_m)\}}_{= d_\infty(\vec{x_n}, (a_1, \ldots, a_m))} < \varepsilon$ si $n \geq N$. ∎

Proposición (convergencia en espacios normados): Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado. Considere dos sucesiones (v_n) y (w_n) en V, junto con una sucesión (λ_n) en $\mathbb{R}$. Si $v_n \to a$ y $w_n \to b$, y $\lambda_n \to \lambda$, entonces

$$v_n + w_n \to a + b \quad \text{y} \quad \lambda_n v_n \to \lambda a.$$

• **Demostración:** Respecto a la sucesión $(v_n + w_n)$, considere $\varepsilon > 0$.

$$v_n \to a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, \|v_n - a\| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N_1$$

$$w_n \to b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, \|w_n - b\| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N_2.$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$, se tiene entonces que $\|v_n - a\| < \varepsilon/2$ y $\|w_n - b\| < \varepsilon/2$. Luego, por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\|(v_n + w_n) - (a+b)\| \leq \|v_n - a\| + \|w_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

$\therefore (v_n + w_n) \to a + b.$

Ahora, respecto a la sucesión $(\lambda_n v_n)$, para el $\varepsilon > 0$ anterior, se tiene por $\lambda_n \to \lambda$ que existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq M \Rightarrow |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/2K,$$

donde $K > 0$ es una cota de la sucesión (v_n).

Note que $\|\lambda_n v_n - \lambda a\| = \|\lambda_n v_n - \lambda v_n + \lambda v_n - \lambda a\|$
$$\leq |\lambda_n - \lambda| \|v_n\| + |\lambda| \|v_n - a\|$$

Supongamos $\lambda \neq 0$. Luego, como $v_n \to a$, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq M_2 \Rightarrow \|v_n - a\| < \varepsilon/2|\lambda|$.

Sea entonces $M = \max\{M_1, M_2\}$ y supongamos que $n \geq M$.

Luego, $\|\lambda_n v_n - \lambda a\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|v_n\| + |\lambda| \|v_n - a\|$
$$\leq |\lambda_n - \lambda| K + |\lambda| \|v_n - a\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon$$

$\therefore (\lambda_n v_n) \to \lambda a.$

El caso $\lambda = 0$ es claro a partir del argumento anterior.

■

<u>Observación</u>: La convergencia de las sucesiones $(v_n + w_n)$ y $(\lambda_n v_n)$ no implica la convergencia de sus sucesiones constituyentes. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ para $v_n = n$ y $w_n = -n$, se tiene que $(v_n + w_n) = (0)$ converge, pero (v_n) y (w_n) divergen. Note algo parecido para $\lambda_n = 0$ y $v_n = n$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, $(x_n, y_n) = (\cos(2\pi n), 1/2^n)$ diverge pues $x_n = \cos(2\pi n)$ diverge.

Sucesiones de números reales

Enfoquémosnos para esta parte en el caso donde $M = \mathbb{R}$ con la métrica usual. Además de su estructura de espacio métrico, $\mathbb{R}$ posee un orden total. El orden $<$ en $\mathbb{R}$ sirve para dar otras condiciones bajo las cuales determinadas sucesiones en $\mathbb{R}$ convergen.

Definición: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Diremos que (x_n) es (estrictamente) creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n < x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Los conceptos de sucesión decreciente y estrictamente decreciente son análogos. Una sucesión dentro de cualquiera de estos cuatro tipos se llama monótona.

Proposición (convergencia de sucesiones de números reales): Sea (x_n) una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1) Si (x_n) es acotada, entonces (x_n) converge.
2) (x_n) converge si y solamente si posee una subsucesión acotada.

• **Demostración:** Solamente nos centraremos en el caso donde (x_n) es estrictamente creciente.

1) Sea $x(\mathbb{N}) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de valores de (x_n). Como (x_n) es acotada, existe $K > 0$ tal que

$$|x_n - x_m| \leq K \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Em particular, $|x_m| - |x_0| \leq |x_m - x_0| \leq k$

$$|x_m| \leq k + |x_0|, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Así, se tiene que $x(\mathbb{N})$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Entonces, sea

$$a = \sup(x(\mathbb{N})).$$

Veamos que $x_m \to a$. Sea $\varepsilon > 0$. Como a es la menor cota superior de $x(\mathbb{N})$, se tiene que para $a - \varepsilon$ existe x_N tal que $a - \varepsilon \leq x_N$. Como (x_m) es estrictamente creciente, se tiene que $a - \varepsilon \leq x_N < x_m$ para todo $m > N$. Por otro lado, es claro que $x_m < a + \varepsilon$ para todo $m > N$. Por lo tanto,

$$m > N \implies |x_m - a| < \varepsilon,$$

es decir, $x_m \to a$.

2) $(\Rightarrow)$ Es claro si tomamos a (x_n) como la subsucesión que se nos pide.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que (x_n) posee una subsucesión acotada, digamos (x_{m_k}). Por 1), dicha subsucesión converge al $\sup(x(m(\mathbb{N}))) = a$. Veamos que $x_m \to a$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_{m_k} \to a$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_k \geq K \implies a - \varepsilon < x_{m_k} < a + \varepsilon.$$

Sea m_{k_0} el menor de tales m_k. Si $m \geq m_{k_0}$, entonces $a - \varepsilon < x_{m_{k_0}} \leq x_m$ ya que (x_m) es estrictamente creciente. Al tener (x_{m_k}) el mismo tipo de monotonía, tenemos que es posible hallar $m_k \geq m$ con $x_m \leq x_{m_k}$. Note además que $m_k \geq K$, por lo cual $x_{m_k} < a + \varepsilon$. Así,

$$m \geq m_{k_0} \implies a - \varepsilon < x_{m_{k_0}} \leq x_m \leq x_{m_k} < a + \varepsilon$$

$\therefore x_m \to a.$ $\quad (|x_m - a| < \varepsilon)$

Ejemplo:

La sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ dada por $x_n = a^n$ converge $\forall a \in (-1, 1]$.

Para los casos $a = 0, 1$, x_n es una sucesión constante y por tanto converge a 0 si $a = 0$, o a 1 si $a = 1$.

Supongamos ahora que $0 < a < 1$. Luego, (a^n) es una sucesión estrictamente decreciente. Por otro lado, (a^n) es acotada ya que $0 \leq a^n$. Por la proposición anterior, (a^n) converge. Sea $L = \lim a^n$

$$L = \lim a^n = \lim a^{n+1} = \lim a \cdot a^n = a \cdot \lim a^n = a L$$

$$L = a \cdot L \text{ y } a \neq 1 \implies L = 0$$

Así, $a^n \to 0 \quad \forall a \in [0, 1)$

Supongamos ahora $a \in (-1, 0)$. Por la parte anterior, sabemos que $|a|^n \to 0$. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies ||a|^n - 0| < \varepsilon$. Como $|a^n - 0| = ||a|^n - 0|$, se tiene que $n \geq N \implies |a^n - 0| < \varepsilon$.

$\therefore a^n \to 0$ si $a \in (-1, 0)$.

Series

Usando la teoría de espacios métricos, podemos generalizar un poco el concepto de serie numérica estudiado en cálculo. Recuerde que dada una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$, su serie es la sucesión de sumas parciales dada por

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Como en los espacios normados tenemos una operación de suma, es posible extender el concepto anterior a dicha estructura.

Definición: Sea $(V, \|-\|)$ un espacio vectorial real normado y (v_n) una sucesión en V. La serie de (v_n) es la sucesión de sumas parciales (S_n) dada por

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$

Diremos que la serie, denotada por $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge si la sucesión (S_n) converge. En caso contrario, diremos que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

Proposición: Si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, entonces $v_n \to 0$.

· **Demostración:** $v_n = S_n - S_{n-1}$ $\forall n \geq 1$.
Como (S_n) y (S_{n-1}) convergen al mismo límite, se tiene que $v_n \to 0$. ■

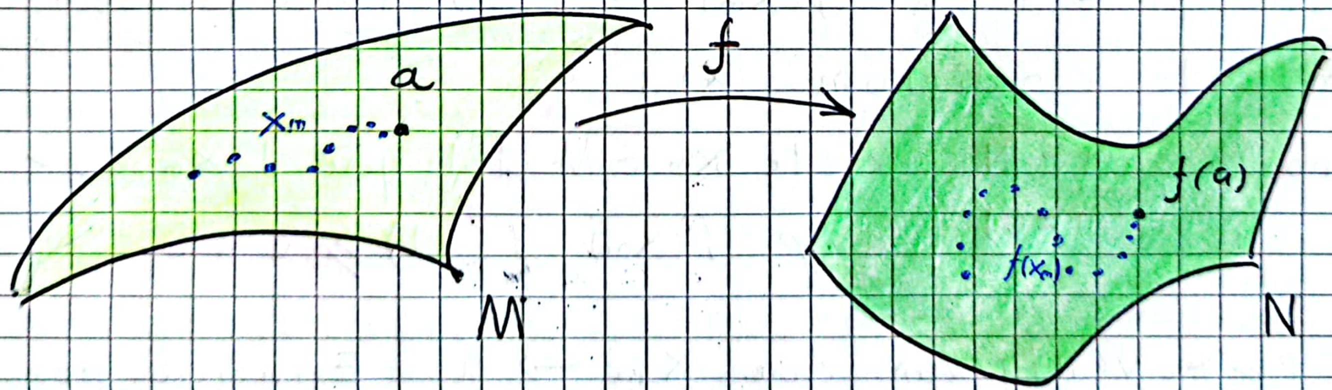
Ejemplo: El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Considere la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sabemos que $\frac{1}{n} \to 0$. Por otro lado, veamos que esta serie diverge. Como $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ es una sucesión estrictamente creciente, basta con ver que (S_n) posee una subsucesión no acotada (superiormente). Considere S_{2^n}.

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right)$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Relaciones entre la convergencia y la topología métrica

En esta sección caracterizaremos los conceptos principales de la topología métrica mediante sucesiones convergentes, a saber: continuidad, clausura, frontera, conjunto abierto y cerrado.

Proposición (caracterización de funciones continuas en un punto): Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos y $f: M \to N$ una función. Para $a \in M$, se tiene que f es continua en a si y solamente si para toda sucesión (x_n) que converge al punto a se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ inducida en N converge a $f(a)$.



Demostración:

$(\Rightarrow)$ Supongamos que f es continua en $a \in M$ y sea (x_n) una sucesión en M tal que $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \rho(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon. \quad (*)$$

Para tal $\delta > 0$, como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \quad (**)$$

Combinando $(*)$ y $(**)$, tenemos que

$$n \geq N \underset{(*)}{\Longrightarrow} d(x_n, a) < \delta \underset{(**)}{\Longrightarrow} \rho(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

$\therefore \quad f(x_n) \longrightarrow f(a).$

$(\Leftarrow)$ Usamos reducción al absurdo.

Supongamos que f no es continua en a. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$(*) \quad \forall \delta > 0, \ \exists x_\delta \in B(a, \delta) \ \text{con} \ \rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon.$$

La idea ahora es construir una sucesión (x_n) en M con $x_n \to a$ y $f(x_n) \not\to f(a)$. Para tal fin, usemos la condición $(*)$:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$, existe $x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$

y $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

Se puede verificar que $x_n \to a$ (Ejercicio para el lector - usar la propiedad arquimediana). Por otro lado, $f(x_n) \not\to f(a)$ ya que $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$. Esto último es una contradicción. ■

Tenemos del resultado anterior las siguientes maneras de verifican la continuidad de una función en un punto mediante sucesiones.

<u>Corolario</u>: Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y $f: M \to N$ una función. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1) Si para toda sucesión (x_n) en M convergente a un punto $a \in M$ se tiene que $(f(x_n))$ converge en N, entonces f es continua en a.
2) Si para toda sucesión (x_n) en M convergente a un punto $a \in M$ se tiene que $(f(x_n))$ posee una subsucesión que converge a $f(a)$, entonces f es continua en a.
3) f es continua en $a \in M$ si y solamente si la imagen $(f(x_n))$ de toda sucesión convergente (x_n) en M es convergente en N. En cualquier caso, $f(\text{Lím}\, x_n) = \text{Lím}\, f(x_n)$.

• <u>Demostración</u>:

1) Por la proposición anterior, basta con probar que $f(x_n)$ converge a $f(a)$.

Considere la sucesión $(z_n) = (x_0, a, x_1, a, x_2, a, \ldots)$ y su sucesión inducida $(f(z_n)) = (f(x_0), f(a), f(x_1), f(a), \ldots)$. Como $z_n \to a$, se tiene por la hipótesis que $(f(z_n))$

converge en N. Sea $L = \lim f(z_n)$. La subsucesión constante $(f(a))$ converge entonces a L, por lo cual $L = f(a)$. Por otro lado, la subsucesión $(f(x_n))$ también converge a $L = f(a)$. Por lo tanto, $\lim f(x_n) = f(a)$.

2) Siguiendo la demostración de la proposición anterior, si suponemos que f no es continua en a podemos construir una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to a$ y $f(x_n) \not\to f(a)$. De hecho, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que ninguna subsucesión de $(f(x_n))$ converge a $f(a)$.

3) Es consecuencia de la parte 1). $\blacksquare$