Práctico 6 - Singularidades

Def: Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$.
Decimos que f tiene una singularidad en a si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$

Recordatorio: Si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ y f es continua en $a \Rightarrow$ $f \in H(\Omega)$

Sea a una singularidad de $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.
Si f es cont. en a, se extiende a una $\tilde{f} \in H(\Omega)$
Decimos que a es evitable

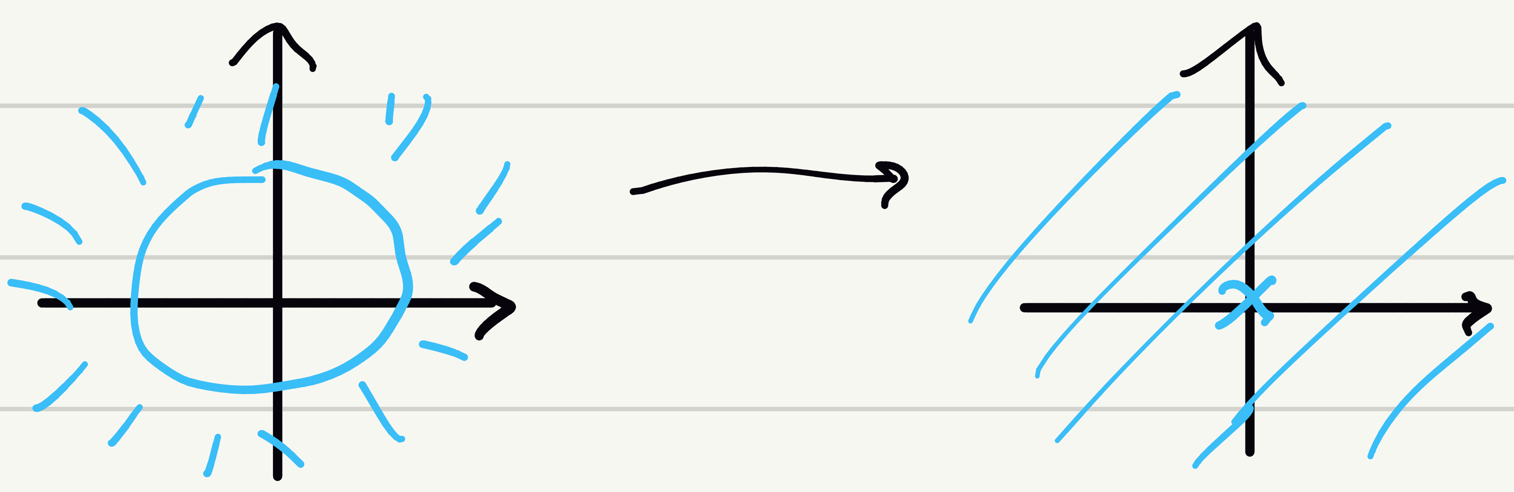
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!} z^{2n}$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=-m}^{-1} C_n (z-a)^n$

decimos que a es un polo de orden m

Teorema: (Casorati-Weirestrass)
Si a no es evitable ni un polo,
$\forall \delta > 0$, $\overline{f(B^*(a,\delta))} = \mathbb{C}$
Decimos que a es escencial.

$e^{1/z}$: $z \to 0 \Rightarrow \frac{1}{z} \to +\infty$



Teorema: Si $\exists w \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \to a} f(z) = w \Rightarrow a$ es evitable

Si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Rightarrow a$ es un polo

Si no existe $\lim_{z \to a} f(z)$, a es escencial

Obs: Valen los recíprocos

11. Sean
$$f_1(z) = \frac{sen(z)}{z} \qquad f_2(z) = \frac{1-cos(z)}{z}$$

Probar que cero es una singularidad evitable para ambas funciones y concluir que $\int_\gamma f_i(z)dz = 0$, para $i = 1,2$, para cualquier $\gamma \subset \mathbb{C}$ curva cerrada.

$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{C} \Rightarrow$ 0 es evitable para f_1

Como $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, f_1 se extiende a $\tilde{f}_1$ entera

Dada $\gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerrada, $\int_\gamma f_1 = \int_\gamma \tilde{f}_1 = 0$ porque

12. Clasificar las singularidades y los polos de:

$f_1(z) =$ a) $\frac{z+9}{z^4-16}$ $\quad f_2(z) =$ b) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^n}$ $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \frac{(z-\pi)}{z^4 sen(z)} \qquad \frac{e^z - 1}{z^4 sen(z)} \qquad sen(\frac{1}{z})$

$\frac{z+9}{(z^2-4)(z^2+4)} = \frac{z+9}{(z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)} \to 2, -2, 2i, -2i$ son polos

$(z-2)^1 f_1(z) \in H(B(2,1)) \to 2$ es un polo de orden 1 (y las demás también)

$f_2(z) = \frac{e^{1/z}}{z^n}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^n} = 0$ (Como en ej. 7)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^n} = \infty \Rightarrow$ no existe $\lim_{z \to 0} f_2(z)$

$\Rightarrow$ 0 es esencial.

14. Probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa con inversa holomorfa entonces:

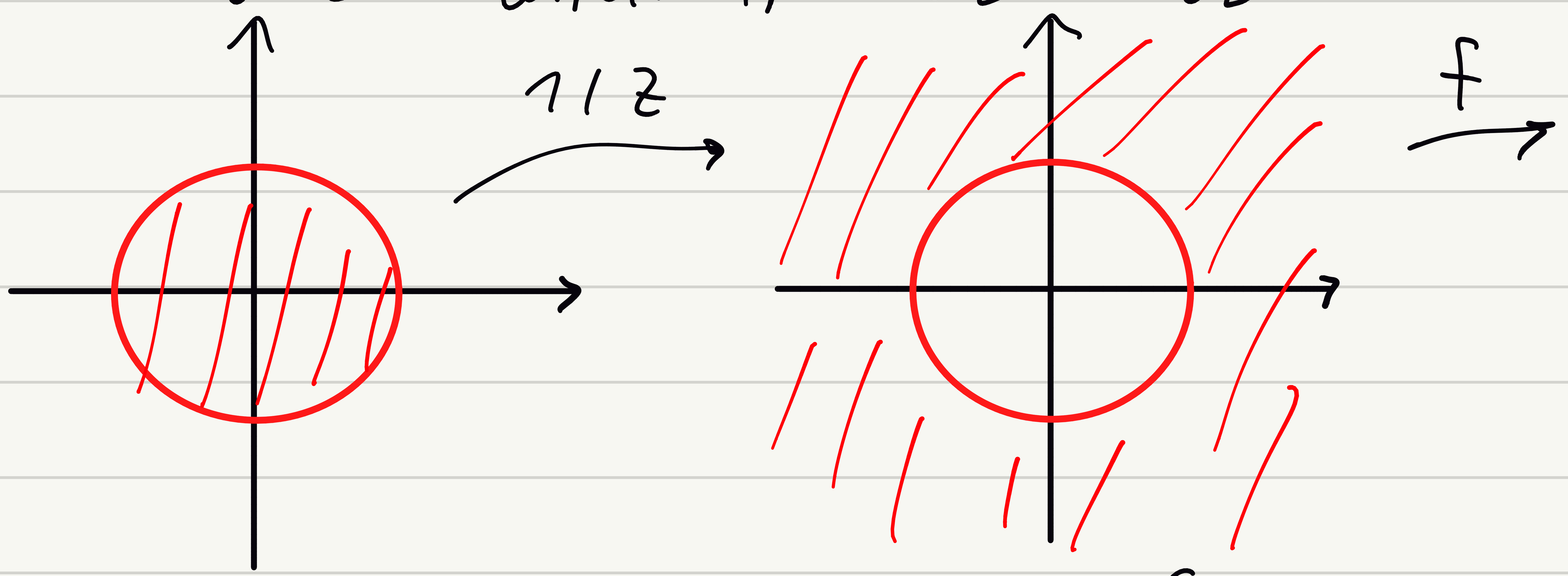
a) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$

Sea $g(z) := f(1/z)$. Como $f \in H(\mathbb{C})$, $g \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

Estudiemos la singularidad en $z=0$.

Caso 1: es evitable $\Rightarrow$ g se extiende a $\tilde{g}$ entera.

Como $\tilde{g}$ es continua, está acotada en $\overline{B(0,1)}$



$\Rightarrow f$ está acotada en $B(0,1)^C$

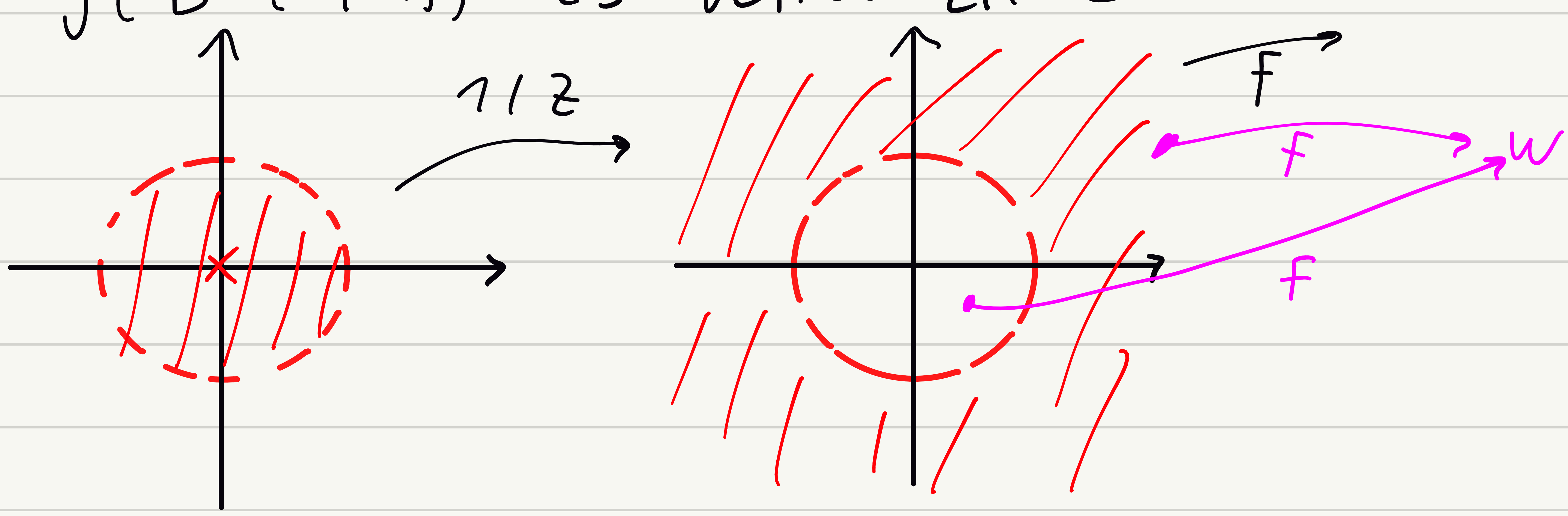
Como f es continua, está acotada en $\overline{B(0,1)}$

$\Rightarrow f$ está acotada en $B(0,1)^C \cup \overline{B(0,1)} = \mathbb{C}$

Como $f \in H(\mathbb{C})$, por Liouville $f \equiv cte$ $\lightning$ porque f es inyectiva.

Caso 2: es esencial.

$g(B^*(0,1))$ es denso en $\mathbb{C}$



Como f es entera e inyectiva, f es abierta

$\Rightarrow f(B(0,1))$ es abierto

Como la intersección de un denso y un abierto siempre es no vacía, $g(B^*(0,1)) \cap f(B(0,1))$

$= f(\overline{B(0,1)}^c) \cap f(B(0,1)) \neq \emptyset$

Es decir, $\exists w \in \mathbb{C}, \exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$ y $f(z_1) = w = f(z_2)$
$\lightning$ Porque f es inyectiva.

En conclusión, g tiene un polo en $z=0$.
$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} g(z) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} f(1/z) = \infty = \lim\limits_{z\to +\infty} f(z)$

b) $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. *Sugerencia: usando lo anterior, $f(1/z)$ tiene un polo en $z = 0$.*

10. Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, con A y B constantes positivas. Demostrar que f es un polinomio.
Sugerencia: Probar que $f^n(z) = 0$, $\forall n > k$, $\forall z \in \mathbb{C}$ usando las estimativas de Cauchy.

$g(z) = f(1/z)$ Sea k el orden de 0 como polo de g. $\Rightarrow z^k g(z)$ es entera

Como $z^k g(z)$ es continua, $\exists B > 0, \forall z \in \overline{B(0,1)}, |z^k g(z)| \leq B$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{z^k} f(z) \right| \leq B$ para $\frac{1}{z} \in \overline{B(0,1)} \Leftrightarrow z \in B(0,1)^c$

$\Rightarrow |f(z)| \leq B|z|^k$

Como f es continua, $\exists A > 0, \forall z \in \overline{B(0,1)}, |f(z)| \leq A$

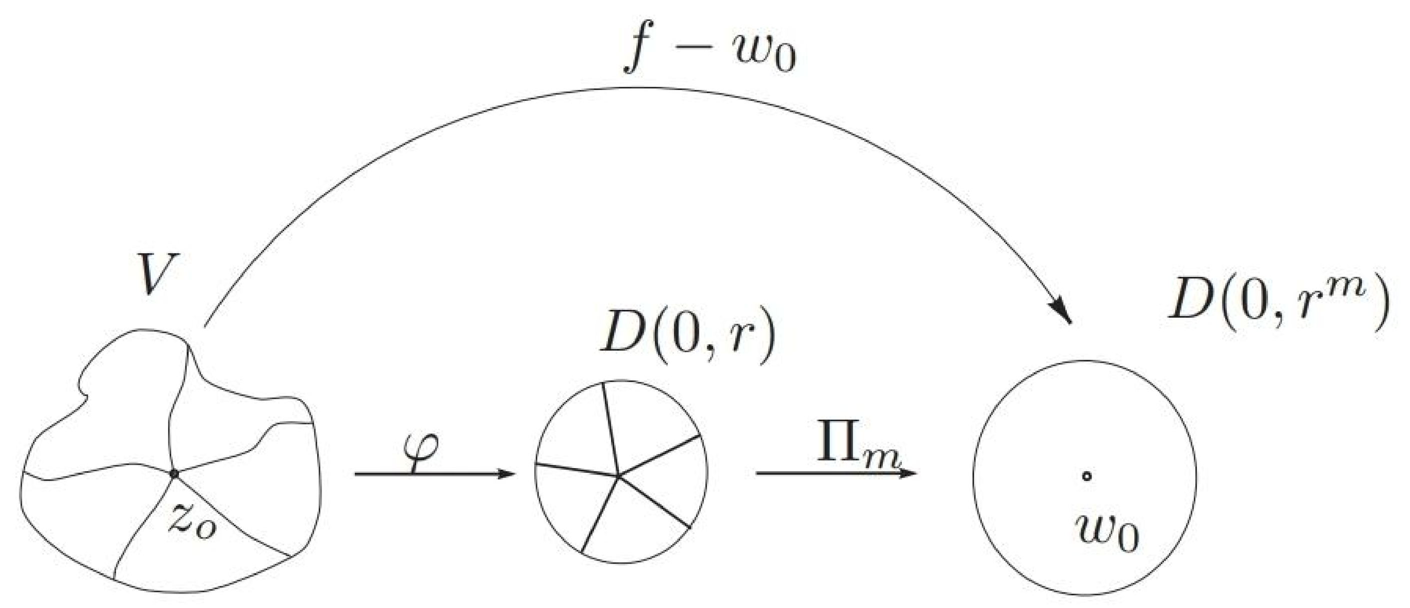
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \max\{A, B|z|^k\} \leq A + B|z|^k$

$\Rightarrow f$ es un polinomio (Ej. 10)
$f \neq cte$ porque es inyectiva $\Rightarrow gr(f) \geq 1$

Supong. por abs. que $n = gr(f) \geq 2$
Por el teorema fundamental del álgebra, f tiene n raíces contadas con multiplicidad.
Caso 1: f tiene al menos dos raíces distintas
$\Rightarrow f(z_1) = 0 = f(z_2)$ con $z_1 \neq z_2$ $\lightning$

Caso 2: $f(z) = a(z - z_0)^n \rightarrow$ No es inyectiva $\lightning$

PROPOSICIÓN 13. **Estructura local** *Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ y f no constante. Entonces existe V entorno de z_0 tal que:*
i) $f(z) - w_0 = \Pi_m(\varphi(z))$ para una $\varphi \in H(V)$.
ii) φ es inyectiva en V, $\varphi'(z) \neq 0$ $\forall z \in V$ y $\varphi(V) = D(0, r)$.



OBSERVACIÓN 5. El m que aparece en $i)$ es el orden del cero que $f(z) - w_0$ tiene en z_0. Este teorema muestra que para cada $u \in D(0, r^m)\setminus\{0\}$ existen $v_1, \cdots, v_m$ puntos en V tales que $f(v_i) = u$, $\forall i = 1, .., m$; esto suele expresarse así: f es localmente m a 1 en z_0. Vea que si $m = 1$ entonces este teorema es caso particular del anterior ya que $f'(z_0) \neq 0$.

$\Longrightarrow f(z) = az + b \quad , \; a \neq 0$