Práctico 6 - Ceros de funciones holomorfas y funciones enteras

Teorema 18. *Sean Ω una abierto conexo, $f \in H(\Omega)$ y $Z(f)$ el conjunto de ceros de f en Ω, esto es*

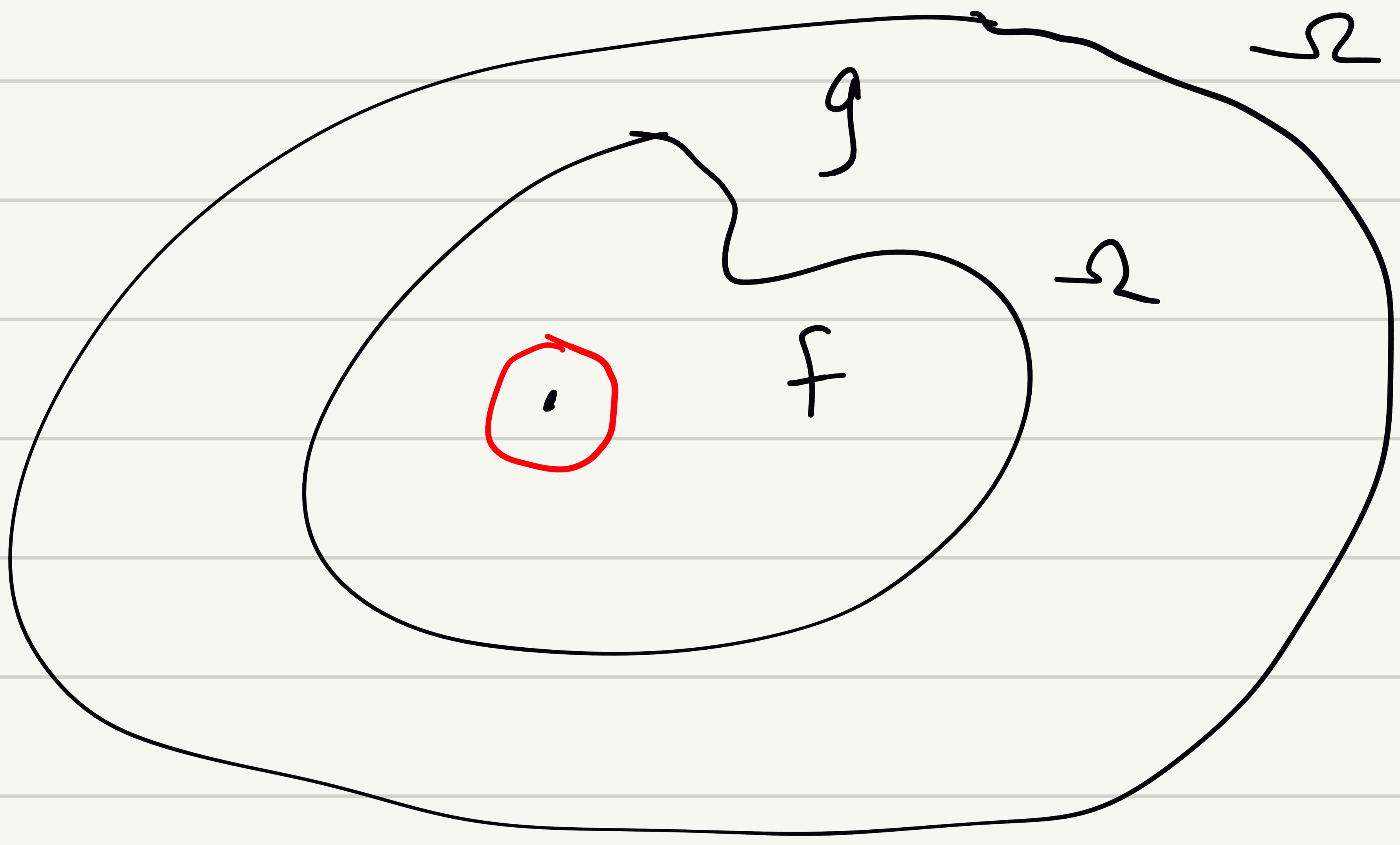
$$Z(f) = \{a \in \Omega / \ f(a) = 0\}.$$

Entonces son equivalentes:

1. *$f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.*
2. *$Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω.*
3. *Existe $\alpha \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(\alpha) = 0 \ \forall n \geq 0$.*

$g|_{\Omega} = f$

$\Omega' \supsetneq \Omega$



Corolario 19. *Sean $f, g \in H(\Omega)$, Ω conexo.*

1. *Si $f(z) = g(z)$ en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo punto de Ω.*

Dem: $h(z) := f(z) - g(z)$

Por hip $Z(h)$ acumulan en Ω.

$\Rightarrow h \equiv 0 \Rightarrow f \equiv g$

1. Probar que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \ \text{sen} \ y)$ es la única forma de extender de manera holomorfa la exponencial real al plan complejo. En otras palabras, probar que no existe otra función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $g(z) = e^z \ \forall z \in \mathbb{R}$. Idem para $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $g(z) = \cos z$.

Es claro que $f|_{\mathbb{R}}(x) = e^x$. Además $f \in H(\mathbb{C})$

Sea $g \in H(\mathbb{C}) \ / \ g|_{\mathbb{R}}(x) = e^x$

Es claro que $g|_{\mathbb{R}} = f|_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$ acumula en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow g \equiv f$ (Por el corolario)

2. Dar un ejemplo de una función holomorfa en $\mathbb{C}$ con infinitos ceros y no nula.

$\cos z$, $\sin z$, $e^z - 1$

3. Probar que si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y $fg \equiv 0$ entonces $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.

$\mathbb{C}$ cuerpo $\rightarrow$ $+, -, \cdot, /$

Neutro
Invertibles
Asociativa
Conmutativa

($\cdot$ invertible menos para 0)

$\cdot$ distribuye respecto de $+$

$H(\Omega)$: Neutro de $+$: $f \equiv 0$
Neutro de $\cdot$: $f \equiv 1$
Inverso de $-$: $-f$
Inverso de $\cdot$: $z \in H(\mathbb{C})$ no tiene
Asociativas y conmutativas : ✓
Distributiva: ✓

$H(\Omega)$ es un anillo conmutativo
Si probamos que vale la Hankeliana, es un dominio.

Caso 1: $f \equiv 0$ ✓
Caso 2: $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, a \in \Omega$, $f(a) \neq 0 \Rightarrow |f(a)| > 0$
Como $f \in H(\Omega)$, $|f|$ es continua
Por el teorema de conservación del signo, $\exists \delta > 0, \forall z \in B(a,\delta)$, $|f(z)| > 0$. En particular, $f(z) \neq 0$

Dado $z \in B(a,\delta)$, $f(z) \cdot g(z) = 0 \Rightarrow g(z) = 0 \Rightarrow g|_{B(a,\delta)} \equiv 0$

Como $B(a,\delta)$ es de acumulación en Ω, $g|_{\Omega} = g \equiv 0$

Def: f es entera si $f \in H(\mathbb{C})$

Teorema 23. **Liouville**. *Si f es entera y acotada, entonces es constante.*

8. Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

a) $\Omega = \mathbb{C}$, y $|f(z) - \underbrace{e^z \sin(z)}_{\in H(\mathbb{C})}| \leq 4\ \forall z \in \mathbb{C}$.

$g(z) = f(z) - e^z \sin(z)$

Por hip, $|g(z)| \leq 4$ y como $f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow g \in H(\mathbb{C})$

Por Liouville, $g \equiv c \in \mathbb{C}$. Además $|c| \leq 4 \Rightarrow c \in \overline{B(0,4)}$

$f(z) = e^z \sin z + c, \quad c \in \overline{B(0,4)}$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) Probar que $f^{(n)}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} e^{-\frac{1}{x}}$ $\forall x \neq 0$ siendo p y q polinomios.

b) Probar que $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) Concluir que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$= 0$

d) Probar que no existe un disco centrado en $x = 0$ donde la serie de Taylor de f en $x = 0$ converga a f en el disco. $\rightarrow f(\varepsilon) \neq 0, \quad \varepsilon \neq 0$

e) Probar que no existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa que extienda f a los complejos.

a) Inducción: P.B. $\rightarrow f'(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} e^{-1/x}$

P.I. $\rightarrow$ Supong. $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{-1/x}$

Probamos $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$

$= \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} e^{-1/x}$

b) Def. de derivada e inducción

P.B. $\rightarrow f'(0) = 0$

P.I. $\rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = 0$

c) Por a) y b)

e) Por d)