ESTRATO 03 : CONEXIDAD

Un problema importante en topología es determinar si dos espacios topológicos dados son homeomorfos. Muchas veces esto resulta ser un problema difícil. Por otro lado, el estudio de invariantes topológicos ayuda a responder cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos. Un invariante topológico es cualquier propiedad definida sobre espacios topológicos que es preservada bajo homeomorfismos. Entonces, si X e Y son espacios topológicos tales que en X se cumple determinado invariante y en Y no, ocurre que no es posible definir un homeomorfismo entre X e Y.

- La cardinalidad es un ejemplo de invariante topológico, es decir, si $f: X \to Y$ son homeomorfos, entonces $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$. Por lo cual, si dos espacios topológicos poseen cardinalidades distintas, entonces no pueden ser homeomorfos.
- Ser acotado es un ejemplo de una propiedad que no es invariante bajo homeomorfismos. Por ejemplo, la función tangente $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, donde $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es acotado y $\mathbb{R}$ no.

En estas notas estudiaremos el primer invariante topológico importante del curso, la conexidad. Antes de definir en qué consiste esta propiedad, necesitamos aprender un poco de topología relativa.

Topología relativa

Dado un espacio topológico $(M,\mathcal{T})$, en ocasiones nos es útil considerar para subconjuntos $X \subseteq M$ una estructura de espacio topológico (o topología) construida a partir de $\mathcal{T}$. Esto está determinado en el siguiente resultado.

Proposición (topología relativa): Sea $(M,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $X \subseteq M$. Considere el siguiente subconjunto de $\mathcal{P}(X)$:

$$\mathcal{T}_X = \{ U \cap X \,/\, U \in \mathcal{T} \}.$$

Entonces, $\mathcal{T}_X$ es una topología sobre X, llamada topología relativa de X.

• **Demostración:** Hay que verificar que $\mathcal{T}_X$ cumple las tres propiedades de la definición de topología.

(i) $X = M \cap X \in \mathcal{T}_X$
$\emptyset = \emptyset \cap X \in \mathcal{T}_X$ ya que $\emptyset, M \in \mathcal{T}$.

(ii) Sea $\{U_i \cap X \,/\, U_i \in \mathcal{T}\}_{i \in I}$ una familia de abiertos relativos. Luego,

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap X) = \Big(\bigcup_{i \in I} U_i \Big) \cap X \in \mathcal{T}_X \text{ ya que } \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

(iii) Sean $U \cap X$ y $V \cap X$ en $\mathcal{T}_X$ $(U, V \in \mathcal{T})$. Luego,

$$(U \cap X) \cap (V \cap X) = (U \cap V) \cap X \in \mathcal{T}_X, \text{ ya que } U \cap V \in \mathcal{T}.$$

$\therefore$ $\mathcal{T}_X$ es una topología en X. ■

Dentro del contexto de espacios métricos, las topologías relativas son justamente aquellas que se obtienen al restringir métricas sobre subconjuntos. Específicamente, tenemos lo siguiente.

Proposición (topología relativa en espacios métricos): Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subseteq M$. Considere la métrica $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d_X := d|_{X \times X}$, es decir,

$$d_X(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Entonces, $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{d_X}$.

- **Demostración:**

($\subseteq$) Sea $V \in \mathcal{T}_X$, es decir, $V = U \cap X$, donde $U \in \mathcal{T}_d$. Considere $x \in U \cap X$. Como $U \in \mathcal{T}_d$, existe $r > 0$ tal que

$$B_d(x, r) \subseteq U.$$

Por otro lado, $B_{d_X}(x, r) = B_d(x, r) \cap X$, ya que

$$B_{d_X}(x, r) = \{ y \in X \,/\, \underbrace{d_X(y, x)}_{= d(y, x)} < r \}.$$

Luego, $B_{d_X}(x, r) \subseteq U \cap X \quad \forall x \in U \cap X$, por lo cual $U \cap X \in \mathcal{T}_{d_X}$.

($\supseteq$) Sea $V \in \mathcal{T}_{d_X}$. Luego, $V = \bigcup_{x \in V} B_{d_X}(x, r_x)$ donde cada $r_x > 0$ cumple que $B_{d_X}(x, r_x) \subseteq V$.

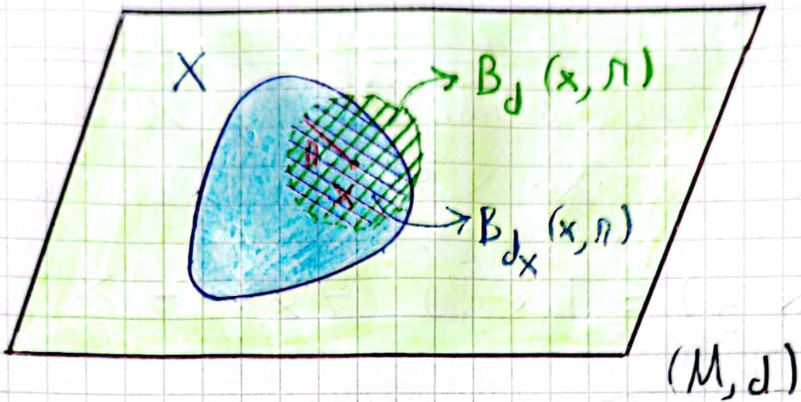
Por el razonamiento anterior,

$$B_{d_X}(x, r_x) = B_d(x, r_x) \cap X.$$

Luego, $V = \bigcup_{x \in V} B_{d_X}(x, r_x) = \bigcup_{x \in V} (B_d(x, r_x) \cap X)$

$$= \Big(\bigcup_{x \in V} B_d(x, r_x)\Big) \cap X \in \mathcal{T}_X,$$

ya que $\bigcup_{x \in V} B_d(x, r_x) \in \mathcal{T}_d$. ∎



Definición y ejemplos de espacios conexos

Sea (M,d) un espacio métrico.

- Si $U, V \in \mathcal{T}_d$ y $U \cap V = \emptyset$, diremos que $\{U, V\}$ es una partición de M si $M = U \cup V$.
  Al par $\{\emptyset, M\}$ se le conoce como partición trivial.
- El espacio (M,d) se dice conexo si la única partición posible de M es la trivial. De lo contrario, diremos que M es disconexo.

Ejemplo:

1) $\mathbb{R} - \{0\}$ es disconexo, ya que $\{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$ es una partición no trivial de $\mathbb{R} - \{0\}$.

2) Todo espacio discreto con más de un punto es disconexo. Recuerde que (M,d) es discreto si para todo $x \in M$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap M = \{x$

Así, $M = \bigcup_{x\in M} B(x, r_x)$ es una unión de bolas abiertas disjuntas, y por lo tanto es disconexo.

3) $\mathbb{R}$ es conexo. Esto se puede probar por reducción al absurdo. Supongamos que $\{X, Y\}$ es una partición no trivial de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = X \cup Y$$

donde $X, Y \in \mathcal{T}_d$, $X \cap Y = \emptyset$, $\emptyset \subsetneq X, Y \subsetneq \mathbb{R}$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Supongamos que tenemos $x \in X$ e $y \in Y$ con $x < y$. Sea $X_y = \{\tilde{x} \in X \,/\, \tilde{x} < y\}$. Note que $X_y \neq \emptyset$ ya que $x \in X_y$, y además X_y es acotado superiormente pues y es una cota superior de X_y. Por el axioma de completitud, X_y posee supremo $z = \sup(X_y)$. Así, $z \leq y$.

- $z = \sup(X_y) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{x} \in X_y \,/\, z - \varepsilon < \tilde{x} < z$, es decir, $B(z, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset \;\forall \varepsilon > 0$. Tenemos entonces que z es un punto de adherencia de X. Como X es cerrado (ya que $\mathbb{R} - X = Y$ es abierto), se tiene que $z \in X$.
- Por otro lado, X es también abierto, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subseteq X$, es decir,

$$(z - \delta, z + \delta) \subseteq X.$$

Note que podemos escoger el δ anterior tal que además cumpla con $z + \delta < y$. Entonces, si $w \in (z, z+\delta)$ se tiene que $z < w < y$, por lo cual z no es cota superior de X_y, lo cual es una contradicción.

Caracterizaremos a continuación el concepto de conexidad.

Proposición: Las siguientes condiciones son equivalentes para todo espacio métrico (M, d):

(a) (M, d) es conexo.

(b) M y $\emptyset$ son los únicos subconjuntos de M que son abiertos y cerrados a la vez.

(c) Si $X \subseteq M$ tiene frontera vacía, entonces $X = \emptyset$ o $X = M$.

• **Demostración:**

(a) $\Rightarrow$ (b): Sea $U \subseteq M$ tal que U es abierto y cerrado a la vez. Luego, $M - U$ es también abierto, por lo cual $\{U, M-U\}$ es una partición de M. Como M es conexo, $\{U, M-U\} = \{\emptyset, M\}$, por lo cual $U = \emptyset$ o $U = M$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $X \subseteq M$ tal que $\partial X = \emptyset$. Supongamos $X \neq \emptyset$. Sabemos por un resultado previo que

$$M = \mathring{X} \cup \partial X \cup (M-X)^\circ.$$

$$M = \mathring{X} \cup (M-X)^\circ.$$

Luego, $\mathring{X}$ es abierto y cerrado a la vez. Por la parte (b), se tiene que $\mathring{X} = \emptyset$ o $\mathring{X} = M$. Si $\mathring{X} = \emptyset$, entonces $M = (M-X)^\circ$. Como $(M-X)^\circ \subseteq M - X \subseteq M$, se tiene entonces que $M - X = M$, es decir, $X = \emptyset$. Pero al asumir $X \neq \emptyset$, nos queda que $\mathring{X} = M$. Como $\mathring{X} \subseteq X \subseteq M$, concluimos que $X = M$.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Sea $\{U, M-U\}$ una partición de M. Calculemos ∂U. Si $\partial U \neq \emptyset$ y tomamos $x \in \partial U$, tenemos que $B(x,r) \cap U \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap (M-U) \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Si $x \in U$, como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq U$. En este caso, $B(x,\delta) \cap (M-U) = \emptyset$. Luego, $x \in M-U$. Como $M-U$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq M-U$. En este caso, $B(x,\varepsilon) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, U no puede tener puntos de frontera. Así, $\partial U = \emptyset$. Por (c), $U = \emptyset$ o $U = M$, por lo cual $\{U, M-U\}$ es la partición trivial, y por lo tanto M es conexo. ∎

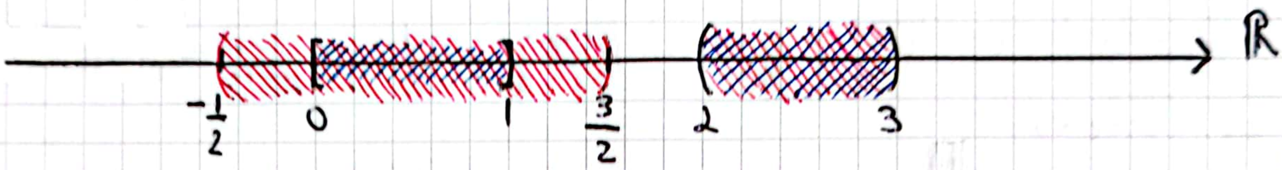
Conexidad en subespacios de un espacio métrico.

La propiedad de conexidad se puede abordar también dentro de subconjuntos de un espacio métrico. Por topología relativa sabemos que si (M, d) es un espacio métrico y $X \subseteq M$, entonces X es en sí mismo un espacio métrico con $d_X = d|_{X \times X}$. Luego, podemos preguntarnos si X es conexo o no. Además para estos casos relativos se pueden dar caracterizaciones bastante completas y propiedades útiles.

Definición: Dado un espacio métrico (M, d), diremos que un subconjunto $X \subseteq M$ es conexo si (X, d_X) es un espacio métrico conexo. Para el caso en el cual (X, d_X) es disconexo como espacio métrico, diremos que X es un subconjunto de M disconexo.

Ejemplo:

1) $X = [0,1] \cup (2,3)$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}$, ya que $X = \left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap X \right) \cup \left((2,3) \cap X \right)$, donde $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $(2,3)$ son abiertos en $\mathbb{R}$, por lo cual $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap X = [0,1]$ y $(2,3) \cap X = (2,3)$ son abiertos relativos disjuntos y no triviales en X.



2) Sea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Pensando en los elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como arreglos de columnas, podemos hacer la identificación $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$ y equipar a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con la métrica euclídea de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sea $G(n,\mathbb{R})$ el subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formado por las matrices invertibles. Entonces, $G(n,\mathbb{R})$ es disconexo y

$$G(n,\mathbb{R}) = G^{+}(n,\mathbb{R}) \cup G^{-}(n,\mathbb{R})$$

es una partición no trivial de $G(n,\mathbb{R})$, donde $G^{+}(n,\mathbb{R})$ (resp. $G^{-}(n,\mathbb{R})$) es el subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formado por aquellas matrices con determinante positivo (resp. negativo). (Ejercicio / ver Tarea 2).

Escaneado con CamScanner

Proposición (caracterización de particiones de subconjuntos): Sea (M,d) un espacio métrico y $X \subseteq M$. Entonces, X es disconexo si existen $A, B \subseteq X$ tales que:

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

(iii) $X = A \cup B$.

(iv) A no contiene puntos de acumulación de B, y B no contiene puntos de acumulación de A.

• **Demostración:**

$\forall a \in A, \exists r_a > 0 / B(a, r_a) \cap B = \emptyset$, ya que a no es punto de acumulación de B.

De manera similar, $\forall b \in B, \exists \rho_b > 0 / B(b, \rho_b) \cap A = \emptyset$.

Sean $U = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ y $V = \bigcup_{b \in B} B(b, \rho_b)$, que son abiertos en M.

Por otro lado,

$U \cap X = (U \cap A) \cup (U \cap B)$,

donde
$$U \cap B = \left(\bigcup_{a \in A} B(a, r_a)\right) \cap B = \bigcup_{a \in A} \left(B(a, r_a) \cap B\right) = \emptyset$$

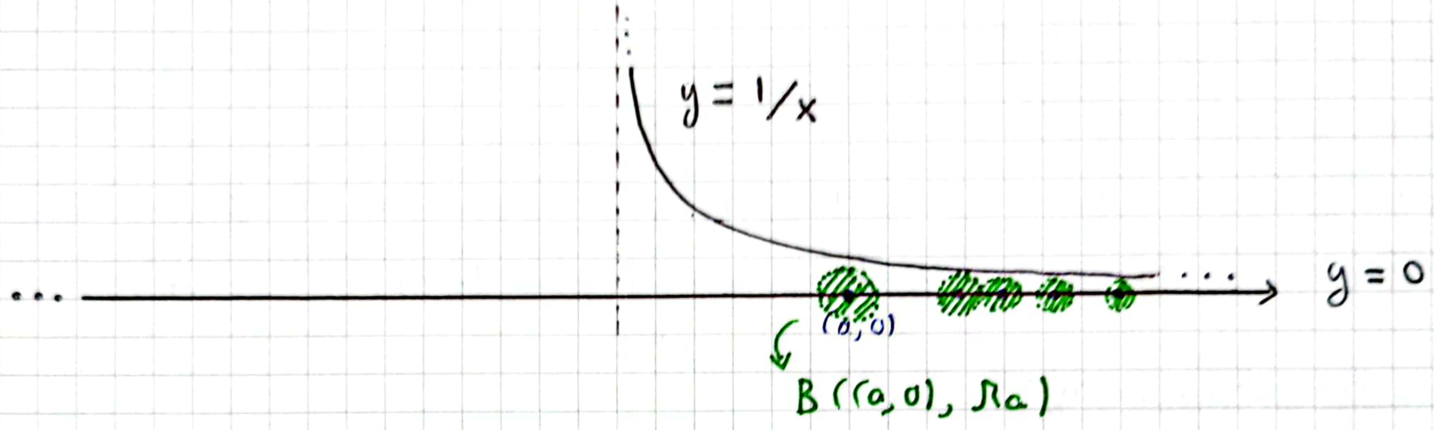
Así, $U \cap A$ es un abierto relativo en X. De manera similar, $V \cap B$ es un abierto relativo de X. Más aún,

- $(U \cap A) \cap (V \cap B) = (U \cap V) \cap (A \cap B) = \emptyset$
- $(U \cap A) \cup (V \cap B) = A \cup B = X$
- $U \cap A = A \neq \emptyset$ y $V \cap B = B \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\{U \cap X, V \cap X\}$ es una partición no trivial de X, por lo cual X es disconexo. $\blacksquare$

Ejemplo: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y = 1/x\}$

Por el resultado anterior, X es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^2$.



Veamos algunas propiedades más de la conexidad en subconjuntos de un espacio métrico.

Proposición: Sea (M, d) un espacio métrico disconexo con una partición no trivial $\{U, V\}$. Si $X \subseteq M$ es un subconjunto conexo, entonces $X \subseteq U$ ó $X \subseteq V$.

- **Demostración:** $\{U \cap X, V \cap X\}$ es una partición de X. Al ser X conexo, tal partición es la trivial, por lo cual $U \cap X = \emptyset$ y $V \cap X = X$ (de donde $X \subseteq V$), ó $U \cap X = X$ y $V \cap X = \emptyset$ (de donde $X \subseteq U$). ■

La propiedad anterior sirve para probar que entre un subconjunto conexo y su clausura no pueden haber conjuntos disconexos.

Proposición: Si (M, d) es un espacio métrico y $X \subseteq M$ un subconjunto conexo. Si $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$, entonces Y es conexo. En particular, $\overline{X}$ es conexo.

• Demostración: Sea $\{Y\cap U, Y\cap V\}$ una partición de Y (con U y V abiertos en M). Supongamos que esta partición es no trivial. Como $X \subseteq Y$ es conexo, se tiene por la proposición anterior que $X \subseteq Y\cap U$ o $X \subseteq Y \cap V$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $X \subseteq Y\cap V$. Luego, $\overline{X} \subseteq \overline{Y\cap V}$. Por otro lado, como $Y\cap V$ es cerrado en Y, $\overline{Y\cap V} = Y\cap V$ (en la topología relativa de Y), por lo cual $\overline{Y\cap V} \cap (Y\cap U) = \emptyset$. Ahora, como $Y \subseteq \overline{X}$ y $\overline{X}\cap (Y\cap U) = \emptyset$, se tiene que $Y\cap (Y\cap U) = \emptyset$, de donde $Y\cap U = \emptyset$, lo cual es una contradicción. ∎

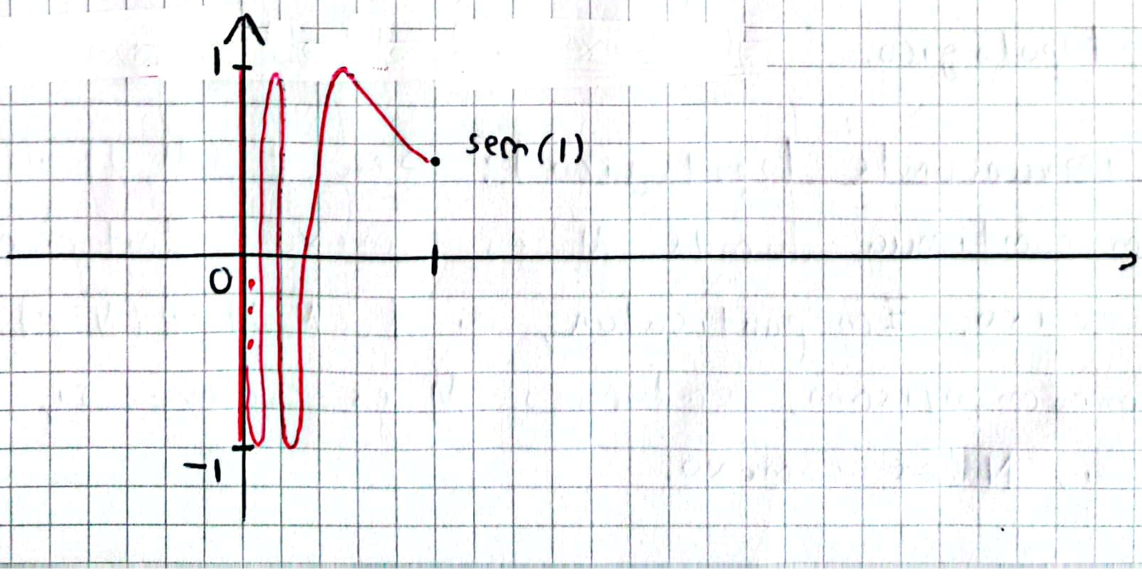
Ejemplo (la curva seno del topólogo): Sea

$$X = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right),\ 0 < x \leq 1\right\}$$

El conjunto

$$\overline{X} = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) / \ 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,y) \,/\, -1 \leq y \leq 1\}$$

se conoce como la "curva seno del topólogo", y es conexo ya que X es conexo.



//

Propiedades de la conexidad

En esta parte estudiaremos si la conexidad se preserva bajo funciones continuas o bajo las operaciones de unión y producto cartesiano.

Preservación bajo uniones: Sea (M, d) un espacio métrico y $\{X_i\}_{i\in I}$ una colección de subconjuntos conexos de M tal que $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i\in I} X_i$ es conexo.

• **Demostración:** Sea $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ y $p \in \bigcap_{i\in I} X_i$, y considere una partición $X = U \cup V$ de X, no trivial.

Lo primero es notar que o $p \in U$ o $p \in V$. Supongamos que $p \in U$. Por otro lado, como cada X_i es conexo, se tiene por una proposición anterior que X_i está enteramente contenido en U o en V. Como $p \in U \cap X_i$, se tiene que $X_i \subseteq U$, para todo $i \in I$. Luego, $X \subseteq U$. Como $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, lo anterior implica que $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

$\therefore$ X es conexo. $\blacksquare$

Veamos a continuación que la conexidad es un invariante topológico.

Teorema (invariante topológico): Sea $f : (M, d) \to (N, \rho)$ una función continua donde M es conexo. Entonces, $f(N)$ es conexo. En particular, si $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es un homeomorfismo, entonces M es conexo si, y solamente si, N es conexo.

• **Demostración:** Como todo subconjunto de un espacio métrico es un espacio métrico en sí mismo con la métrica restringida, basta probar el caso en el cual f es sobreyectiva. Veamos entonces que $N = f(M)$ es conexo sabiendo que M es conexo y f es continua.

Sea $N = U \cup V$ una partición de N. Luego,

$$M = f^{-1}(N) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

donde $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en M ya que U y V son abiertos en N. Además,

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Tenemos así que $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ es una partición de M, y al ser M conexo, ésta debe ser trivial. Por tanto,

(i) $f^{-1}(U) = M$ y $f^{-1}(V) = \emptyset$,

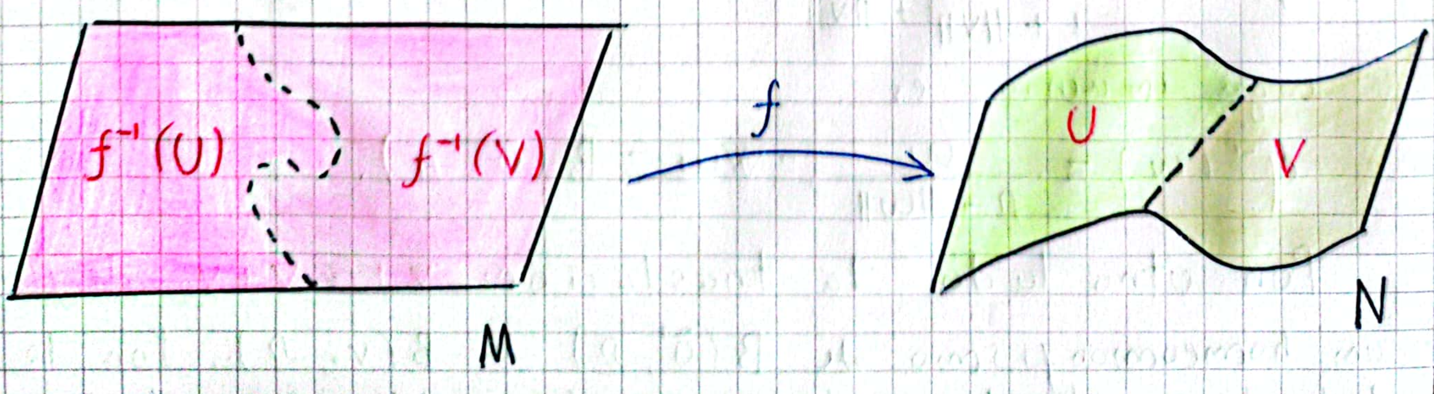
o

(ii) $f^{-1}(U) = \emptyset$ y $f^{-1}(V) = M$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos (i). Luego, como f es sobreyectiva, se tiene

$$N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sobreyectividad}}}{=} f(M) = f(f^{-1}(U)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sobreyectividad}}}{=} U \quad \text{y} \quad \emptyset = f(f^{-1}(V)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sobreyectividad}}}{=} V$$

$\therefore$ $\{U, V\}$ es una partición trivial de N, y N es conexo.



Ejemplos

1) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ es conexo, ya que $S^1 = f(\mathbb{R})$ donde $f : \mathbb{R} \to S^1$ es la función continua dada por

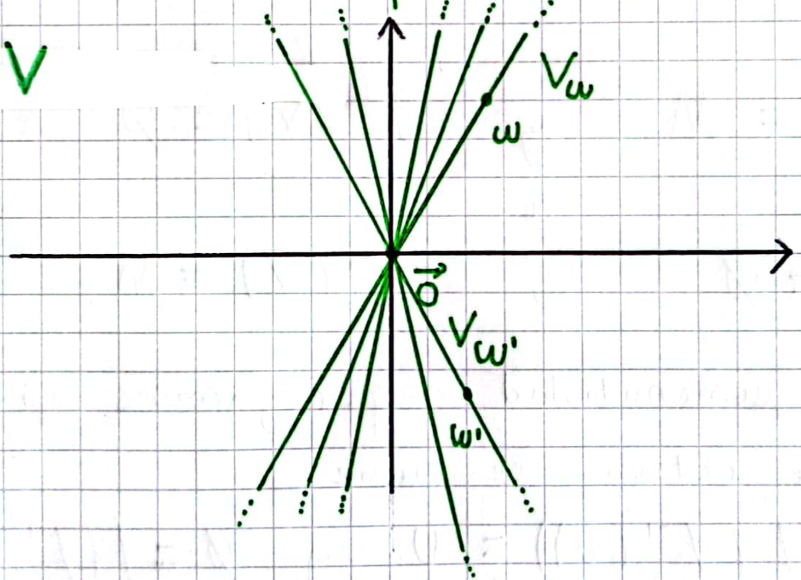
$$f(x) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$$

y $\mathbb{R}$ es conexo.

2) Todo espacio vectorial real normado $(V, \|\cdot\|)$ es conexo, por ser la unión de todos los

$$V_\omega = \{t\omega \,/\, t \in \mathbb{R}\} \quad (\text{homeomorfo a } \mathbb{R})$$
$$(\omega \in V)$$

y con el vector $\vec{0}$ como punto en común.



- $B(\vec{0}, r)$ es conexo en V.

$\varphi : V \to B(\vec{0}, r)$

$\varphi(v) = \dfrac{rv}{1 + \|v\|}$ es un homeomorfismo,

cuya inversa es

$$\varphi^{-1}(\omega) = \frac{\omega}{r - \|\omega\|}, \quad \forall \omega \in B(\vec{0}, r).$$

Por otro lado, la traslación $v \mapsto v + v_0$ define un homeomorfismo de $B(\vec{0}, r)$ a $B(v_0, r)$. Por lo tanto toda bola abierta es homeomorfa a V, y por ende conexa.

- Toda bola cerrada en V es conexa, ya que

$$\overline{B}(v_0, r) = \overline{B(v_0, r)}$$

, donde $B(v_0, r)$ es conexa

¡Recuerde que estamos en un espacio vectorial normado!

Estabilidad respecto al producto cartesiano: El producto finito de espacios métricos conexos es conexo.

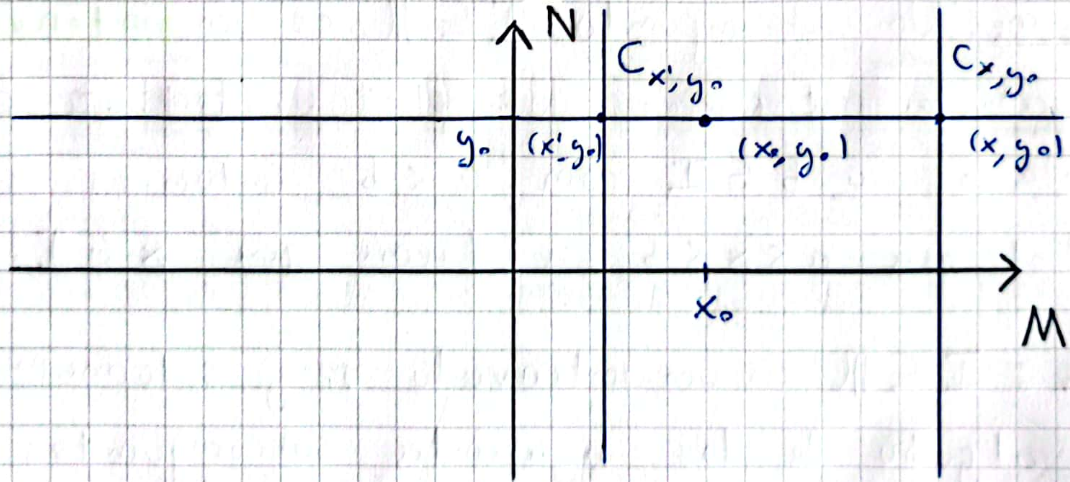
- **Demostración:** Hagamos el caso en el que se tienen dos espacios métricos, digamos (M, d) y (N, ρ). La idea es escribir $M \times N$ como una unión de conjuntos conexos con intersección no vacía.

Fijamos un punto $(x_0, y_0) \in M \times N$.

$$M \times N = \bigcup_{x \in M} C_{x, y_0}$$

donde

$$C_{x, y_0} = \{(x, y) \,/\, y \in N\} \cup \{(x', y_0) \,/\, x' \in M\}$$



(i) $\{(x, y) \,/\, y \in N\}$ es conexo por ser homeomorfo a N.
x fijo

De manera similar, $\{(x', y_0) \,/\, x' \in M\}$ es también conexo.

(ii) C_{x,y_0} es conexo por ser unión de conexos y

$\{(x,y) / y \in N\} \cap \{(x', y_0) / x' \in M\} = \{(x, y_0)\}$
y fijo

(iii) $\bigcap_{x \in M} C_{x,y_0} = \{(x, y_0) / x \in M\}$

$\therefore$ $M \times N = \bigcup_{x \in M} C_{x,y_0}$ es conexo. $\blacksquare$