Introducción a la Teoría de la Información

Práctico 3: Codificación de fuente

Año 2024

Cada ejercicio tiene un símbolo que indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: $\diamondsuit$ básica, $\star$ media, $*$ avanzada, y ‡ difícil.

$\diamondsuit$ Problema 1

Considere el código {0, 01}.
(a) ¿Es instantáneo?
(b) ¿Es unívocamente decodificable?
(c) ¿Es no singular?

$\diamondsuit$ Problema 2

Considere la variable aleatoria X que puede tomar siete valores, cuyas probabilidades figuran debajo de cada valor.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.49 & 0.26 & 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre un código Huffman binario para X.
(b) Encuentre la longitud de código esperada para esta codificación.
(c) Encuentre un código Huffman ternario para X.

$\diamondsuit$ Problema 3

Encuentre el código Huffman binario para la fuente con las probabilidades $(1/3, 1/5, 1/5, 2/15, 2/15)$. Argumente que este código también es óptimo para la fuente con las probabilidades $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$.

♢ Problema 4

¿Cuál de estos códigos no pueden ser códigos de Huffman para ninguna asignación de probabilidad?
(a) 0, 10, 11.
(b) 00, 01, 10, 110.
(c) 01, 10.

♢ Problema 5

Sea

$$S = \begin{pmatrix} S_1, & \cdots, & S_m \\ p_1, & \cdots, & p_m \end{pmatrix}$$

Los S_i se codifican en cadenas a partir de un alfabeto de salida de D símbolos de manera que su codificación es unívocamente decodificable. Si $m = 6$ y las longitudes de las palabras de código son $(l_1, l_2, ..., l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$, encuentra una buena cota inferior para D.

⋆ Problema 6

Considere el proceso $U_1, U_2, ...$ de Markov con 3 estados con matriz de transición

$U_{n-1} \backslash U_n$	S_1	S_2	S_3
S_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
S_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
S_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Así, la probabilidad de que se obtenga S_1 después de S_3 es igual a cero. Diseñe 3 códigos C_1, C_2, C_3 (uno para cada estado 1, 2 y 3), cada código mapeando elementos del conjunto de S_i en secuencias de 0's y 1's, de modo que este proceso de Markov pueda ser enviado con compresión máxima por el siguiente esquema:

(a) Observar el valor del estado actual, X_n; sea i ese valor, es decir $i = X_n$.
(b) Seleccionar el código C_i para codificar el siguiente estado.
(c) Sea j el valor del siguiente estado, es decir, $X_{n+1} = j$. Enviar la palabra de código que corresponde al símbolo j en el código C_i
(d) Repetir para el siguiente símbolo

¿Cuál es la longitud media del mensaje del siguiente símbolo condicionado al estado previo $X_n = i$ usando este esquema de codificación? ¿Cuál es el número medio de bits por símbolo de fuente no condicionado? Relacione esto con la tasa de entropía $H(U)$ de la cadena de Markov.

$\star$ Problema 7

El teorema de codificación de fuente muestra que el código óptimo para una variable aleatoria X tiene una longitud esperada menor que $H(X) + 1$. De un ejemplo de una variable aleatoria para la cual la longitud esperada del código óptimo está cerca de $H(X) + 1$, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, construya una distribución para la cual el código óptimo tiene $L > H(X) + 1 - \epsilon$.

$*$ Problema 8

Palabras como ¡Corre!, ¡Ayuda! y ¡Fuego! son cortas, no porque se utilicen con frecuencia, sino quizás porque el tiempo es valioso en las situaciones en las que se requieren estas palabras. Supongamos que $X = i$ con probabilidad p_i, $i = 1, 2, ..., m$. Sea l_i el número de símbolos binarios en la palabra de código asociada con $X = i$, y sea c_i el costo por letra de la palabra de código cuando $X = i$. Entonces, el costo promedio C de la descripción de X es $C = \sum_{i=1}^{m} p_i c_i l_i$.
(a) ¿Cómo usarías el procedimiento del código Huffman para minimizar C sobre todos los códigos únicamente decodificables? Denote C_{Huffman} como este mínimo.
(b) ¿Puedes mostrar que $C^* \leq C_{\text{Huffman}} \leq C^* + \sum_{i=1}^{m} p_i c_i$?

$\star$ Problema 9

Considere el siguiente método para generar un código para una variable aleatoria X que toma m valores $\{1, 2, ..., m\}$ con probabilidades $p_1, p_2, ..., p_m$. Suponga que las probabilidades están ordenadas de manera que $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m$. Se define

$$F_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k$$

la suma de las probabilidades de todos los símbolos menores que i. Entonces, la palabra de código para i es el número F_i en el intervalo $[0, 1]$ redondeado a l_i bits, donde se toma $l_i = \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil$.
(a) Muestre que el código construido por este proceso es libre de prefijos y que la longitud media satisface $H(X) \leq L < H(X) + 1$.
(b) Construya el código para la distribución de probabilidad $(0.5, 0.25, 0.125, 0.125)$.

⋆ Problema 10

Se te dan 6 botellas de vino. Se sabe que exactamente una botella está en mal estado (sabe horrible). A partir de la inspección de las botellas se determina que la probabilidad p_i de que la i-ésima botella esté en mal estado está dada por $(p_1, p_2, ..., p_6) = \left(\frac{8}{23}, \frac{6}{23}, \frac{4}{23}, \frac{2}{23}, \frac{2}{23}, \frac{1}{23}\right)$. Degustando se determinará el vino malo.

Supongamos que pruebas los vinos uno a la vez. Elija el orden de degustación para minimizar el número esperado de degustaciones requeridas para determinar la botella mala. Recuerde, si los primeros 5 vinos pasan la prueba, no tienes que degustar el último.

(a) ¿Qué botella debería degustarse primero?

(b) ¿Cuál es el número esperado de degustaciones requeridas?

Ahora te vuelves más astuto. Para la primera muestra, mezclas algunos de los vinos en un vaso fresco y pruebas la mezcla. Procedes, mezclando y probando, deteniéndote cuando se haya determinado la botella mala.

(c) ¿Cuál es el número mínimo esperado de degustaciones requeridas para determinar el vino malo?

(d) ¿Qué mezcla debería degustarse primero?