Práctico 7

conexidad

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, y $c \in \mathbb{R}$ un número estrictamente comprendido entre los valores máximo y mínimo de f en $[a,b]$. Entonces, $[a,b] - f^{-1}(\{c\})$ es disconexo.

2. Para toda función continua $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$, demuestre que existe un punto $(a,b) \in S^1$ tal que $f(a,b) = f(-a,-b)$.

3. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico (M,d), tales que $X_\lambda \cap X_\mu \neq \emptyset$, para cualesquiera $\lambda,\mu \in \Lambda$. Demuestre que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es conexo.

   Sugerencia: Considere a $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ con la métrica discreta. Demuestre que ninguna función $f\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \mathbb{Z}_2$ es sobreyectiva.

4. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico (M,d), tales que $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es conexo.

   Sugerencia: Demuestre primero por inducción completa sobre $m \in \mathbb{N}$ que cada unión $\bigcup_{n=0}^{m} X_n$ es conexa.

5. Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que X e Y son homeomorfos. Entonces $Y^\circ = \emptyset$.

   Sugerencia: Usar reducción al absurdo.

6. Sea $(V, \|-\|)$ un espacio vectorial real normado y $T\colon V \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Pruebe que T es continua si, y solamente si, su núcleo $F = T^{-1}(\{0\})$ es un subconjunto cerrado de V.

   Sugerencia: Suponiendo F cerrado, demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $V_a = \{v \in V \ / \ T(v) > a\}$ es abierto. Para esto, use el hecho de que toda bola en V es conexa.

7. Verdadero o falso:

   (a) El interior de un conjunto conexo es también conexo.

   (b) La frontera de un conjunto conexo es también conexo.

   (c) Sea $f\colon (M,d) \to (N,\rho)$ una función continua sobreyectiva. Si M tiene m componentes conexas y N tiene n, entonces $m \geq n$.

   (d) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces cada componente conexa de A es abierta.

   (e) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que la imagen a través de f de todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es conexo, entonces f es continua.

   (f) Si (M,d) es un espacio métrico y $a,b \in M$ pertenecen a componentes conexas distintas, entonces existe una partición $M = A \cup B$ con $a \in A$ y $b \in B$.
   Sugerencia: Considere $a = (0,0)$, $b = (0,1)$, $X = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ n \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{R}\}$ y $M = X \cup \{a,b\}$.