Práctico 6

funciones continuas y homeomorfismos

1. (a) Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y $f,g\colon M \to N$ funciones continuas. Sea $a \in M$ un punto tal que toda bola de centro a contiene un punto $x \in M$ tal que $f(x) = g(x)$. Demuestre que $f(a) = g(a)$.

   (b) Use la parte (a) para demostrar que si $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f = g$.

2. Sean M y N espacios métricos y $\varphi\colon M \to N$ una función cualquiera. Se define $\varphi^\sharp\colon \mathcal{B}(N,\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ mediante
$$\varphi^\sharp(f) := f \circ \varphi$$
para toda $f \in \mathcal{B}(N,\mathbb{R})$, donde $\mathcal{B}(N,\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ están equipados con la norma $\|-\|_\infty$. Demuestre que $\varphi^\sharp$ es una contracción débil (es decir, que $\|\varphi^\sharp(f) - \varphi^\sharp(g)\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$ para todo $f,g \in \mathcal{B}(N,\mathbb{R})$).

3. Demuestre que los siguientes espacio métricos son homeomorfos dos a dos:

   (a) $A = S^1 \times \mathbb{R}$ (cilindro vertical).

   (b) $B = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (plano sin el origen).

   (c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ (corona circular).

   (d) $D = S^2 - \{p,q\}$ donde $p = (0,0,1)$ y $q = (0,0,-1)$.

   (e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z^2 = x^2 + y^2,\ z > 0\}$ (cono sin el vértice).

4. Establezca un homeomorfismo entre el primer cuadrante $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ y el semiplano $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0\}$.

5. Sea $\pi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica. Demuestre que no existe una función continua $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ que coincida con π en $S^n - \{p\}$.

6. Un espacio métrico (M,d) se dice **topológicamente homogéneo** cuando, dados $a,b \in M$ cualesquiera, existe un homeomorfismo $h\colon M \to M$ tal que $h(a) = b$. Demuestre que:

   (a) Si M y N son homeomorfos, entonces M es topológicamente homogéneo si, y solamente si, N lo es.

   (b) Todo espacio discreto es topológicamente homogéneo.

   (c) Toda bola abierta es un espacio vectorial real normado es topológicamente homogénea.

7. Sea B la bola cerrada de $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio 1. Establezca un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - B$ y $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

8. Sean p y q puntos distintos de la esfera unitaria S^2 y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un disco cerrado. Demuestre que $S^2 - \{p,q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - D$.