Continuidad de funciones "partidas"

1. **Para las siguientes ejemplos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para qué la función f es continua.**

parte 1.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En primer lugar, se tiene que f es continua en $I_1 = (-\infty, 2)$ y $I_2 = (2, \infty)$ pues pues restricto a ambos intervalos f es una polinomio. Concluimos así que $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Estudiaremos la continuidad de f en $x = 2$. Para que f sea continua en $x = 2$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, o lo que es equivalente $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ Calculemos así lo límites laterales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} ax^2 + 2x = 4a + 4 = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} x^3 - ax = 8 - 2a$$

Se tiene que cumplir entonces que $4a + 4 = 8 - 2a$, por lo que f es continua en $\mathbb{R}$ si solo si $a = \frac{2}{3}$.

parte 2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

En primer lugar, se tiene que f es continua en $I_1 = (-\infty, 2)$ pues es cociente de polinomios y el denominador no se anula en I_1. Además f es continua en $I_2 = (2, 3)$ y $I_3 = (3, +\infty)$ pues restricta a cada uno de estos intervalos f es un polinomio. Tenemos entonces que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Luego, estudiaremos la continuidad de f en $x = 2$ y en $x = 3$.

Al igual que en ejemplo anterior estudiaremos los límites laterales en los puntos que nos faltan.

Para que f sea continua en $x = 2$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4a - 2b + 3 = f(2)$$

Para que f sea continua en $x = 3$ se tiene que cumplir que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b = f(3)$$

Se tiene así que la función f es continua si solo si a,b son soluciones al sistema.

$$\begin{cases} 4a - 2b + 3 = 4 \\ 9a - 3b + 3 = 6 - a + b \end{cases}$$

o lo que es equivalente

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}$ si solo si $a = b = \frac{1}{2}$

2. **Sean f y g funciones reales definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -4 & \textbf{si } x > 0 \\ |4-x| & \textbf{si } x \leq 0 \end{cases}$.**
Estudiar la continuidad en 0 de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

Por ser f una función polinómica definida en todo $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$.
Estudiemos la continuidad de g en 0:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} |4-x| = 4 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} -4 = -4$$

Por lo que g no es continua en 0.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 16 & \text{si } x > 0 \\ (4-x)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Estudiaremos la continuidad de $f \circ g$ en 0:

$$\lim_{x \to 0^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0^-} (4-x)^2 = 16 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0^-} 16 = 16$$

Por lo que $f \circ g$ es continua en 0.
Para la función $(g \circ f)(x)$ se tiene que

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

de donde

$$\lim_{x \to 0} g \circ f(x) = \lim_{x \to 0} -4 \neq g \circ f(0)$$

por tanto la función $g \circ f$ no es continua en 0.