Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Tarea 2

fecha de entrega: 26 de abril de 2024

En los siguientes ejercicios, se considera el conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de las matrices de n filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$. Pensando en dichas matrices como n-uplas ordenadas de columnas de tamaño $n\times 1$, podemos identificar a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $(\mathbb{R}^n)^n = \mathbb{R}^{n\times n}$, y así considerar sobre $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la métrica euclídea de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Demuestre que la función determinante $\det\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y las función $\varphi\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $\varphi(A) = A\cdot A^t$ son continuas (donde A^t denota la traspuesta de A). (2 puntos)

2. Sea $G(n,\mathbb{R})$ el subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formado por las matrices invertibles. Demuestre que $G(n,\mathbb{R})$ es abierto en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. (1 punto)

3. Sea $O(n,\mathbb{R})$ el subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ formado por las matrices ortogonales, es decir, aquellas $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestre que $O(n,\mathbb{R})$ es cerrado y acotado. (2 puntos)