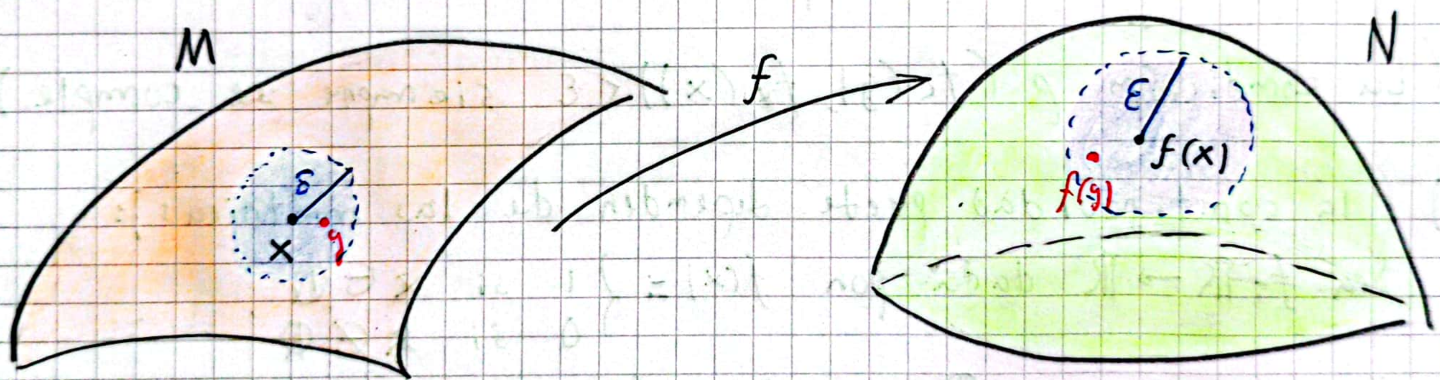
ESTRATO 02: CONTINUIDAD

A la hora de estudiar estructuras matemáticas sobre conjuntos, es importante investigar cuáles son las funciones que preservan dichas estructuras. En el caso de espacios topológicos, tales funciones son las funciones continuas. Nosotros nos enfocaremos en funciones continuas sobre espacios métricos.

Definición: Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y $f: M \longrightarrow N$ una función. Dado $x \in M$, diremos que **f es continua en x** si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ d(y,x) < \delta \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$



Dado $U \subseteq M$, diremos que **f es continua en U** si f es continua en x para todo $x \in U$.

Observación: Vamos a dar varias caracterizaciones del concepto anterior a lo largo de las notas. Podemos empezar con lo siguiente:

- $d(y,x) < \delta$ sii $y \in B_d(x,\delta)$
- $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$ sii $f(y) \in B_\rho(f(x), \varepsilon)$ sii $y \in f^{-1}(B_\rho(f(x),\varepsilon))$

Escaneado con CamScanner

Entonces, f es continua en x si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$. Esto dará una caracterización más fuerte y general más adelante.

Ejemplos:

1) (funciones siempre continuas):

Sea $c \in N$ fijo y $f_c : M \to N$ la función constantemente igual a c, i.e., $f_c(x) = c$ $\forall x \in M$.

f_c siempre es continua sin importar las métricas fijadas sobre M y N. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y tomamos cualquier $\delta > 0$. Así:

$$d(y, x) < \delta \implies \underbrace{\rho(f_c(y), f_c(x))}_{\rho(c,\, c) = 0} < \varepsilon$$

(La condición $\rho(f_c(y), f_c(x)) < \varepsilon$ siempre se cumple).

2) (la continuidad puede depender de las métricas):

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Si se equipa a $\mathbb{R}$ con la métrica usual, f no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Sea d la métrica discreta. $f: (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ es continua. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$. Vemos que

$$d(f(y), f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(y) \neq f(x) \\ 0 & \text{si } f(y) = f(x) \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$:
- Si $\varepsilon \geq 1$, sirve tomar cualquier $\delta > 0$ en la definición de continuidad.
- Si $\varepsilon \in (0, 1)$, sirve tomar $\delta = 1$ en la definición de continuidad.

Escaneado con CamScanner

3) (funciones lipschitzianas): Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y $f: M \to N$ una función. Diremos que f es lipschitziana si existe $c>0$ (constante de Lipschitz) tal que

$$\rho(f(y), f(x)) \leq c \cdot d(y,x)$$
$$\forall x, y \in M.$$

Cuando $c=1$, f recibe el nombre de contracción débil.

Veamos que tales f son continuas (en todo punto de M). Sea $x \in M$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon / c$ y supongamos que $d(y,x) < \delta$. Luego,

$$\rho(f(y), f(x)) \leq c \cdot d(y,x) < c \cdot \delta = \varepsilon.$$

$\therefore$ f es continua en x, $\forall x \in M$.

4) (isometrías): $f: (M,d) \to (N,\rho)$ es una isometría si

$$\rho(f(y), f(x)) = d(y,x), \quad \forall x, y \in M.$$

En otras palabras, una isometría entre espacios métricos es una función que preserva distancias.

- Claramente, toda isometría es continua. Además, las isometrías también son siempre inyectivas. En efecto, sean $x, y \in M$ tales que $f(y) = f(x)$. Luego, $0 = \rho(f(y), f(x)) = d(y,x)$, de donde $y = x$ debido a los axiomas de métrica.
- Las isometrías no necesariamente son sobreyectivas. Sin embargo, dada una isometría $f: (M,d) \to (N,\rho)$, se tiene que $f: (M,d) \to (\mathrm{Im}(f), \rho)$ es biyectiva

Escaneado con CamScanner

Veamos que $f^{-1}: (\mathrm{Im}(f), \rho) \to (M, d)$ es también una isometría (y por lo tanto, continua). Sean $a, b \in \mathrm{Im}(f)$. Existen $x, y \in M$ tales que $a = f(x)$ y $b = f(y)$. Luego,

$$d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = d(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{porque } f \text{ es} \\ \text{isometría}}}{=} \rho(f(x), f(y)) = \rho(a,b)$$

$\therefore$ f^{-1} es isometría.

- La composición de isometrías es una isometría

$$(M,d) \xrightarrow{\quad f \quad} (N, \rho) \xrightarrow{\quad g \quad} (L, \gamma)$$

Supongamos que f y g son isometrías. Luego, dados $x, y \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma(g\circ f(x), g\circ f(y)) &= \gamma(g(f(x)), g(f(y))) \\
&= \rho(f(x), f(y)) \quad \text{(porque } g \text{ es una isometría)} \\
&= d(x,y) \quad \text{(porque } f \text{ es una isometría)}.
\end{aligned}$$

$\therefore$ $g \circ f$ es una isometría.

- Como ejemplos de isometrías, tenemos:
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ con la norma usual y $\mathbb{R}^n$ con cualquier norma p.

    $f(t) = \vec{a} + t\cdot\vec{u}$ donde $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es unitario ($\|\vec{u}\|_p = 1$)

    Veamos que f es una isometría.

    $\|f(t) - f(t')\|_p = \|(t-t')\vec{u}\|_p = |t-t'|\,\|\vec{u}\|_p = |t-t'|$ $\forall t, t' \in \mathbb{R}$.

Escaneado con CamScanner

- Todo espacio métrico (M,d) se puede sumergir vía una isometría en un espacio vectorial normado.

En efecto, considere $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$. Vamos a construir una isometría $f:(M,d) \longrightarrow \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$, pero se debe hacer un análisis por casos:

(i) (M,d) es acotado, es decir, $\exists K>0$ tal que

$$d(x,y) \leq K, \ \forall x,y \in M.$$

En este caso, se define
$$f(x) = d_x : M \to \mathbb{R}$$
$$d_x(y) = d(x,y), \ \forall y \in M.$$

Claramente, $d_x \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$, $\forall x \in M$.

Equipemos a $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$ con la métrica del supremo, y veamos que f es una isometría.

$\forall x,y \in M$, se tiene que:

$$d_\infty(f(x),f(y)) = \|d_x - d_y\|_\infty = \sup_{z\in M} |d_x(z) - d_y(z)|$$

$$= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)|,$$

donde $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \ \forall z \in M$. Así, $d_\infty(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$. Por otro lado, para $z=y$ tenemos

$$\sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)| \geq |d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y)$$

$$\therefore d_\infty(f(x),f(y)) = d(x,y).$$

Escaneado con CamScanner

(ii) (M,d) no es acotado.

En este caso, fijamos $x_0 \in M$ y definimos

$$f(x) = d_x - d_{x_0}.$$

Sea $y \in M$. Luego, $|f(x)(y)| = |d_x(y) - d_{x_0}(y)|$

$$= |d(x,y) - d(x_0,y)|$$

$$\leq d(x,x_0)$$

Así, $|f(x)(y)| \leq \underbrace{d(x,x_0)}_{\text{constante}} \quad \forall y \in M.$

$\therefore f(x) \in \mathcal{B}(M,\mathbb{R})$.

Ahora, con la métrica d_∞ sobre $\mathcal{B}(M,\mathbb{R})$, veamos que f es una isometría.

$\forall x,y \in M$, tenemos:

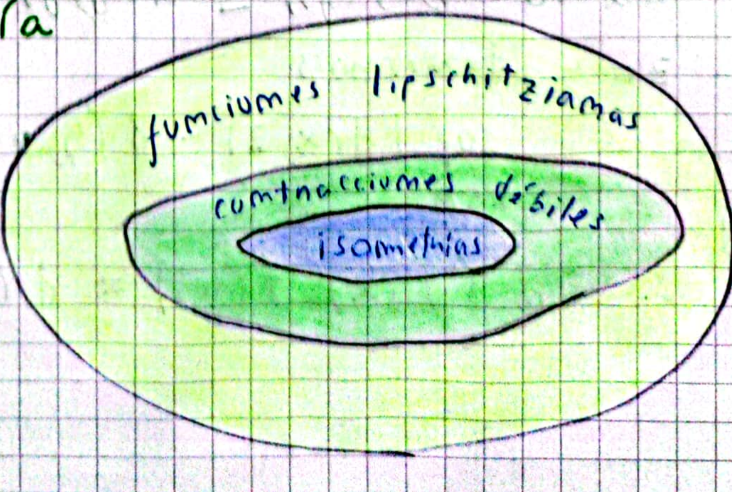
$$d_\infty(f(x),f(y)) = \sup_{z\in M} |f(x)(z) - f(y)(z)|$$

$$= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(x_0,z) - d(y,z) + d(x_0,z)|$$

$$= \sup_{z\in M} |d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y)$$

mismo argumento usado en el caso (i)

$\therefore f$ es una isometría



5) Existen otros casos donde cualquier función $f: M \to N$ es continua independientemente de las métricas tomadas sobre M y N. Concretamente esto ocurre cuando (M, d) es un espacio métrico discreto, es decir, todo punto $x \in M$ es un punto aislado: $\exists r > 0 \,/\, B(x, r) \cap M = \{x\}$.

Veamos que f es continua en x.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap M = \{x\}$. Luego,

$$y \in B(x, r) \Rightarrow y = x \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) = \rho(f(x), f(x)) = 0 < \varepsilon,$$

$(d(y, x) < r)$

(donde ρ es la métrica en N.)

$\therefore f$ es continua en x, $\forall x \in M$.

Caracterizaciones equivalentes del concepto de continuidad

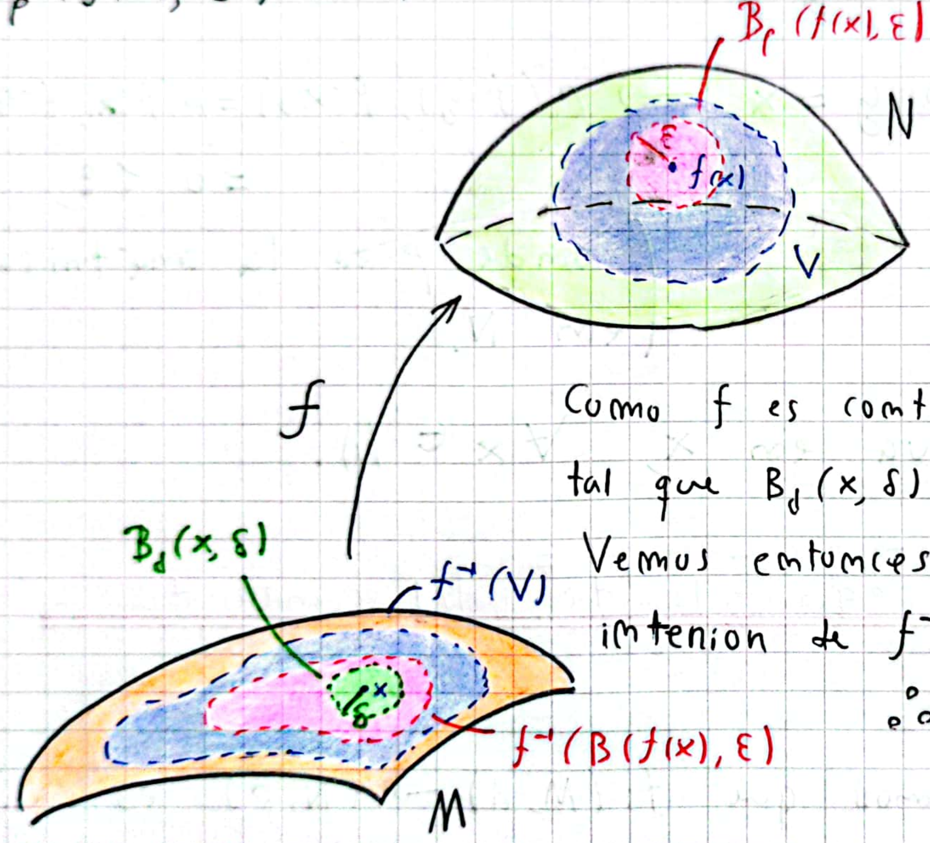
Hasta ahora sabemos que $f: (M, d) \to (N, \rho)$ es continua en $x \in M$ sii $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$, es decir, $\forall \varepsilon > 0$ x es un punto interior de $f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$. Para el caso en el cual f es continua en todo M, esta caracterización se puede extender aún más, como se muestra en el siguiente resultado.

Escaneado con CamScanner

Teonema: Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métnicos. Entonces, $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es contimua si y solamente si $\forall\, V \in \mathcal{T}_\rho$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_d$ (la imagem imvensa de todo abiento em N es abiento em M).

· **Demostnacióm:**

$(\Rightarrow)$ Sea $V \in \mathcal{T}_\rho$ y $x \in f^{-1}(V)$, es decin, $f(x) \in V$. Como V es abiento em N, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(f(x), \varepsilon) \subseteq V$.



Como f es contimua em x, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$. Vemos entonces que x es um pto. intenion de $f^{-1}(V)$, $\forall\, x \in f^{-1}(V)$.

$\therefore\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_d$.

$(\Leftarrow)$ Pana $x \in M$ anbitnanio, veamos que f es contimua em x. Sea $\varepsilon > 0$ y considene $B_\rho(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$. Pon hipótesis, $f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$ es abiento em M. Luego, $x \in f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$ es um punto intenion del conjunto $f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$, de donde existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$, es decin, f es contimua em x. $\blacksquare$

Escaneado con CamScanner

Observación: 1) Cuando se trabaja con espacios topológicos no metrizables, la definición de continuidad usada es la descrita en el teorema anterior, es decir, dados dos espacios topológicos $(M, \mathcal{T})$ y $(N, \mathcal{S})$, una función $f: M \to N$ es continua si $\forall V \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

2) El concepto de continuidad de una función trabaja con imágenes inversas de la función. No confundir esto a la hora de trabajar con imágenes, es decir, si $f: M \to N$ es continua, no es cierto en general que $f(U)$ sea abierto en N para todo abierto U en M. Por ejemplo, si $M = N = \mathbb{R}$ con la topología usual, y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, note que $\mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$ pero $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ no lo es.

Dada una función $f: M \to N$ entre espacios topológicos $(M, \mathcal{T})$ y $(N, \mathcal{S})$, diremos que f es una aplicación abierta si $f(U) \in \mathcal{S}$, $\forall U \in \mathcal{T}$. No toda aplicación abierta es continua. Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función parte entera ($f(x) = \lfloor x \rfloor$ $\forall x \in \mathbb{R}$), se tiene que f es una aplicación abierta pero no continua.

La caracterización dada en el teorema anterior puede ser más útil a la hora de estudiar la continuidad de ciertas funciones o para demostrar que ciertos conjuntos son abiertos. Antes de llegar a esto necesitamos desarrollar un poco más la teoría.

Escaneado con CamScanner

Propiedades de las funciones continuas

Nos enfocaremos en esta parte al siguiente par de preguntas:

- ¿Cómo construir funciones continuas a partir de funciones continuas dadas?
- ¿Cómo puede cambiar la continuidad de una función según se cambie de métrica en el espacio dominio o codominio?

Respondamos primero a lo segundo.

Dado un conjunto M y $d, d' : M \times M \to \mathbb{R}$, recordemos que d es más fina que d' si $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$, o equivalentemente, $\forall x \in M$ y $r > 0$, $\exists \rho > 0$ tal que

$$B_d(x, \rho) \subseteq B_{d'}(x, r).$$

Proposición: Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un conjunto M y dos métricas $d, d' : M \times M \to \mathbb{R}$.

(a) d es más fina que d'.

(b) Para todo espacio métrico (N, ρ), se tiene que si $f : (M, d') \to (N, \rho)$ es continua, entonces $f : (M, d) \to (N, \rho)$ también es continua.

- **Demostración:**

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$ y que $f : (M, d') \to (N, \rho)$ es continua. Sea $V \in \mathcal{T}_\rho$. Luego, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$, por lo cual $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es continua por el teorema anterior.

(b) $\Rightarrow$ (a): Por hipótesis, $id : (M, d) \to (M, d')$ es continua, ya que $id : (M, d') \to (M, d')$ es claramente continua. Luego, si $V \in \mathcal{T}_{d'}$, entonces $V = id^{-1}(V) \in \mathcal{T}_d$. $\therefore \mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$. ■

Escaneado con CamScanner

¿Qué pasa cuando se cambia la métrica en el codominio de una función?

<u>Proposición</u>: Las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo conjunto N y dos métricas $\rho, \rho' : N \times N \to \mathbb{R}$

(a) ρ es más fina que ρ'.

(b) Para todo espacio métrico (M, d), se tiene que si $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es continua, entonces $f : (M, d) \to (N, \rho')$ también es continua.

• <u>Demostración</u>:

(a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos $\mathcal{T}_{\rho'} \subseteq \mathcal{T}_\rho$ y sea $f : (M, d) \to (N, \rho)$ continua. Sea $V \in \mathcal{T}_{\rho'} \subseteq \mathcal{T}_\rho$. Luego, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_d$ ya que $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es continua.

(b) $\Rightarrow$ (a): La identidad $id : (N, \rho) \to (N, \rho)$ es continua. Luego, por (b), se tiene que $id : (N, \rho) \to (N, \rho')$ es continua. Así, $\forall V \in \mathcal{T}_{\rho'}$, se tiene $V = id^{-1}(V) \in \mathcal{T}_\rho$. ■

<u>Corolario</u>: Sea M un conjunto y $d, d' : M \times M \to \mathbb{R}$ dos métricas. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) d y d' son equivalentes ($\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$).

(b) Dada una función $f : M \to N$ donde N es un espacio métrico, f es continua sobre (M, d) si y solamente si lo es sobre (M, d').

(c) Dada una función $g : N \to M$, donde N es un espacio métrico, f es continua sobre (M, d) si y solamente si lo es sobre (M, d').

Escaneado con CamScanner

Respecto a las propiedades de continuidad, tenemos el siguiente resultado para generar funciones continuas nuevas a partir de funciones continuas dadas.

Proposición (álgebra de funciones continuas):

1) Composición de funciones continuas:

Sean $f:(M,d)\to(N,\rho)$ y $g:(N,\rho)\to(P,\mu)$ funciones tales que f es continua en $x_0\in M$ y g es continua en $f(x_0)\in N$. Entonces, $g\circ f:(M,d)\to(P,\mu)$ es continua en x_0.

• **Demostración**: Sea $\varepsilon>0$. Queremos hallar $\delta>0$ tal que

$$B_d(x_0,\delta)\subseteq (g\circ f)^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)),\varepsilon))$$

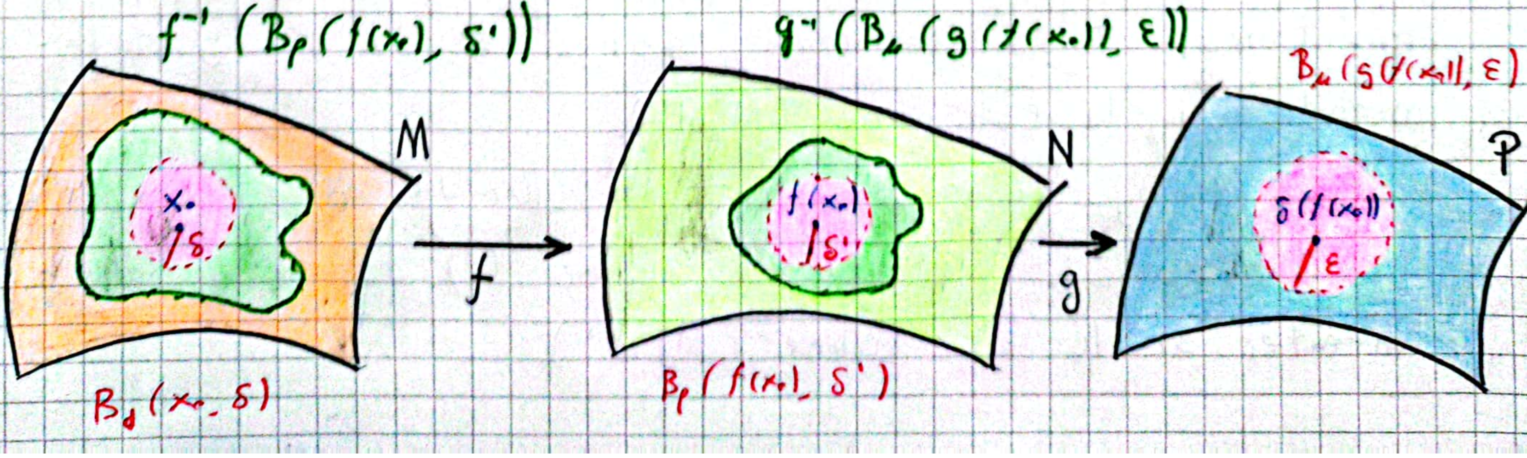
Note que
$$(g\circ f)^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)),\varepsilon)) = f^{-1}(g^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)),\varepsilon))).$$

Como g es continua en $f(x_0)$, existe $\delta'>0$ tal que

$$B_\rho(f(x_0),\delta')\subseteq g^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)),\varepsilon)).$$

Ahora, como f es continua en x_0, existe $\delta>0$ tal que

$$B_d(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x_0),\delta'))$$



De las contenciones anteriores, tenemos que:

$$B_d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \delta')) \subseteq \underbrace{f^{-1}\left(g^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)), \varepsilon))\right)}_{=}$$

$$(g\circ f)^{-1}(B_\mu(g(f(x_0)), \varepsilon)).$$

Por lo tanto, $g\circ f$ es continua en x_0. ∎

2) <u>Continuidad en varias variables</u>: Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos. Damos a $M_1 \times M_2$ la métrica

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M_1 \times M_2$. Sea $f : (M_1 \times M_2, d) \to (N, \rho)$ una función continua en $(x_0, y_0) \in M_1 \times M_2$. Entonces, las funciones

$$f_{x_0} : (M_2, d_2) \to (N, \rho) \qquad y \qquad f_{y_0} : (M_1, d_1) \to (N, \rho)$$
$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y) \qquad\qquad f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$$

son funciones continuas en y_0 y x_0, respectivamente.

- <u>Demostración</u>: Sólo probaremos que f_{x_0} es continua en y_0. Considere la función $i_{x_0} : (M_2, d_2) \to (M_1 \times M_2, d)$. Note que $f_{x_0} = f \circ i_{x_0}$. Entonces, por la propiedad (1), f_{x_0} será continua en y_0 si probamos que i_{x_0} es continua en y_0.

  Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d_2}(y_0, \delta) \subseteq i_{x_0}^{-1}(B_d((x_0, y_0), \varepsilon)).$$

$$B_d((x_0,y_0),\varepsilon) = \{(x,y) \in M_1 \times M_2 \,/\, \max\{d_1(x,x_0), d_2(y,y_0)\} < \varepsilon\}$$
$$= \{x \in M_1 \,/\, d_1(x,x_0) < \varepsilon\} \times \{y \in M_2 \,/\, d_2(y,y_0) < \varepsilon\}$$
$$= B_{d_1}(x_0,\varepsilon) \times B_{d_2}(y_0,\varepsilon)$$

$$i_{x_0}^{-1}(B_d((x_0,y_0),\varepsilon)) = B_{d_2}(y_0,\varepsilon).$$

Basta entonces tomar $\delta = \varepsilon$.

Así, i_{x_0} es continua en y_0, y por lo tanto $f_{x_0} = f \circ i_{x_0}$ es continua en y_0, ya que f es continua en (x_0, y_0). ∎

Observación: El recíproco de la propiedad (2) no es cierto en general. Considere por ejemplo

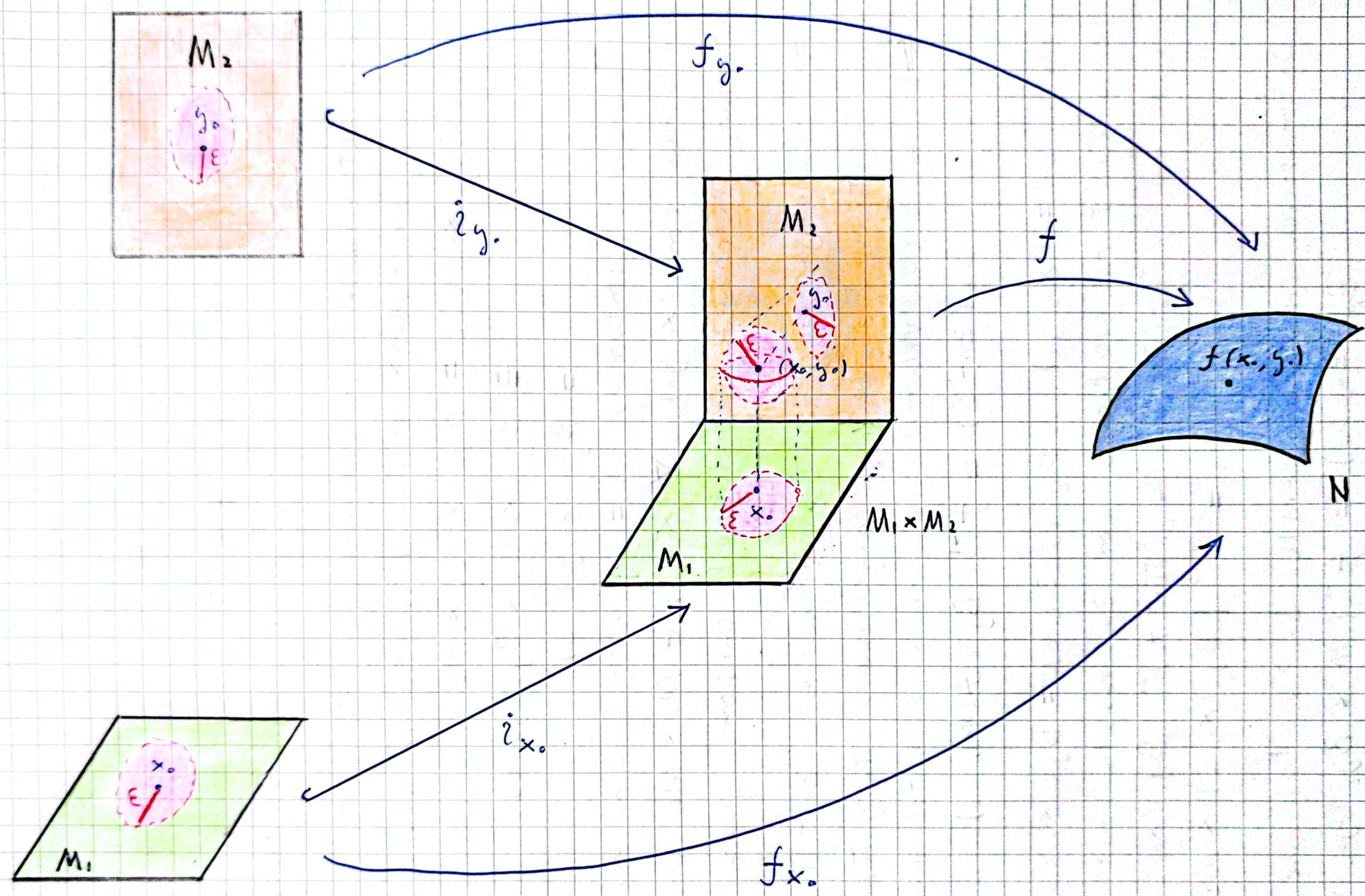
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ xy/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Se considera a $\mathbb{R}$ con la métrica usual y a $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

(la cual es equivalente a la métrica euclídea). Es conocido que f es discontinua en $(0,0)$. Sin embargo, $f_{x=0}(y) = 0$ y $f_{y=0}(x) = 0$ son continuas en $y = 0$ y en $x = 0$, respectivamente.

Escaneado con CamScanner



Escaneado con CamScanner

3) Sean (M_1, d_1), (M_2, d_2), (N, ρ) espacios métricos y $f: (N, \rho) \to (M_1 \times M_2, d)$ una función, donde d es la métrica especificada en (2). Considere las proyecciones $\pi_1: M_1 \times M_2 \to M_1$, $(x, y) \mapsto x$ y $\pi_2: M_1 \times M_2 \to M_2$, $(x, y) \mapsto y$.

Dado $z_0 \in N$, se tiene que f es continua en z_0 si y solamente si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas en z_0.

- **Demostración:** Veamos primero que π_1 y π_2 son continuas. Sea $\varepsilon > 0$ y $(x_0, y_0) \in M_1 \times M_2$. Considere $B_{d_1}(x_0, \varepsilon)$.

$$\pi_1^{-1}(B_{d_1}(x_0, \varepsilon)) = B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times M_2$$
$$\supseteq B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon)$$
$$= B_d((x_0, y_0), \varepsilon).$$

Tomando entonces $\delta = \varepsilon$, vemos que π_1 es continua en (x_0, y_0), $\forall (x_0, y_0) \in M_1 \times M_2$. De manera similar, se puede concluir lo mismo para π_2.

$(\Rightarrow)$ Se sigue a partir de la propiedad (i) y de la continuidad de las proyecciones π_1 y π_2.

$(\Leftarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\rho(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_d(f(z_0), \varepsilon))$$

Sea $f(z_0) = (x_0, y_0)$. $B_d(f(z_0), \varepsilon) = B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon)$

Como $\pi_1 \circ f$ es continua en z_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$B_\rho(z_0, \delta_1) \subseteq (\pi_1 \circ f)^{-1}(B_{d_1}(x_0, \varepsilon))$$
$$= f^{-1}(B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times M_2)$$

De manera similar, existe $\delta_2 > 0$ tal que

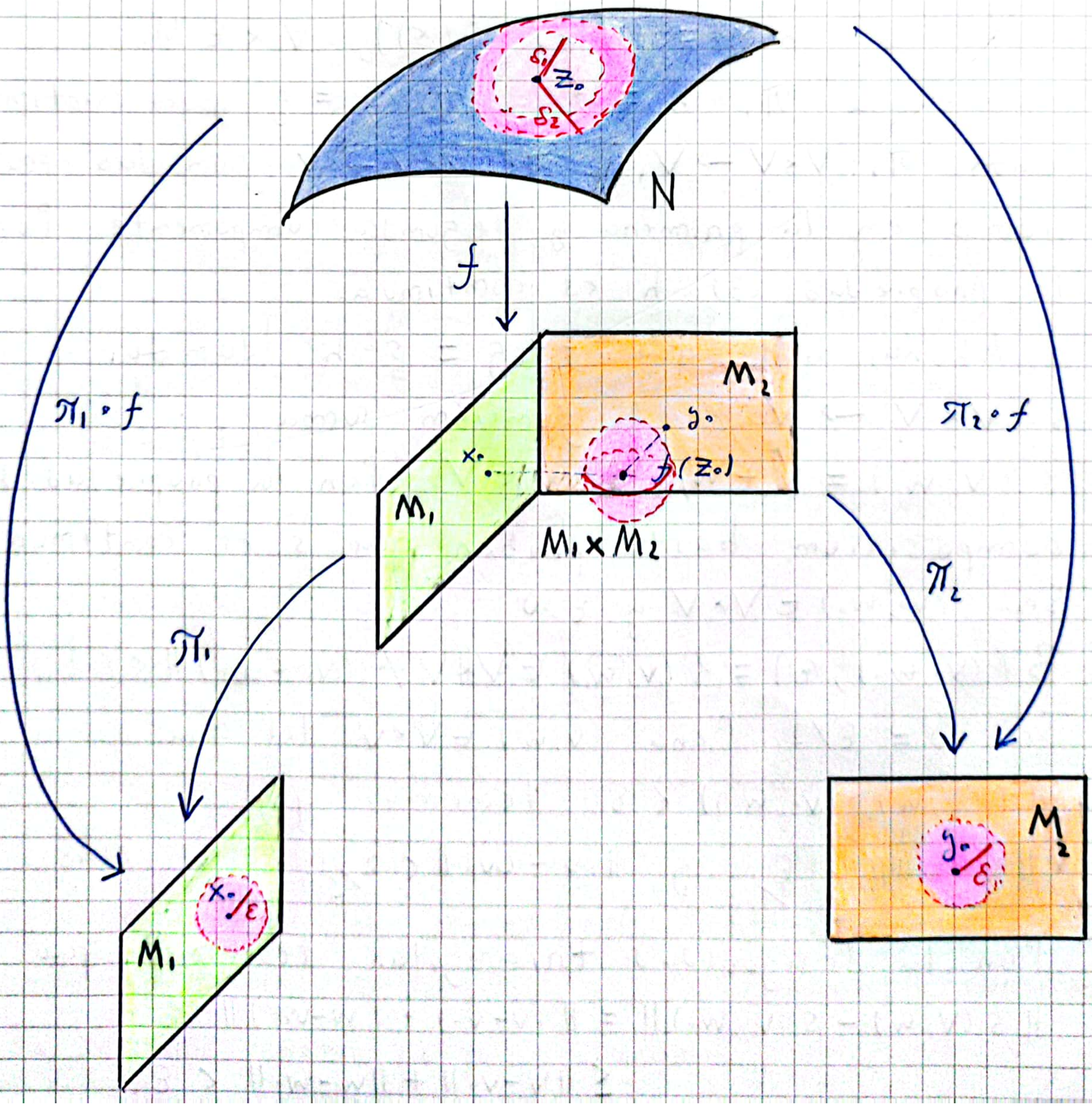
$$B_\rho(z_0, \delta_2) \subseteq f^{-1}(M_1 \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon))$$

Escaneado con CamScanner

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} B_\rho(z_0, \delta) &\subseteq B_\rho(z_0, \delta_1) \cap B_\rho(z_0, \delta_2) \\ &\subseteq f^{-1}(B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times M_2) \cap f^{-1}(M_1 \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon)) \\ &= f^{-1}\left((B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times M_2) \cap (M_1 \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon))\right) \\ &= f^{-1}(B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \times B_{d_2}(y_0, \varepsilon)) \\ &= f^{-1}(B_d((x_0, y_0), \varepsilon)) \end{aligned}$$

$\therefore$ f es continua en z_0. ■



Escaneado con CamScanner

4) <u>Continuidad de la suma:</u> Sea (M, d) un espacio métrico y $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado. Si $f, g : M \to V$ son funciones continuas, entonces la función $f + g : M \to V$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in M$$

es continua.

• <u>Demostración:</u> Considere $V \times V$ con la métrica $\tilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\|x_2 - x_1\|, \|y_2 - y_1\|\}$, y sea $h : M \to V \times V$ la función dada por

$$h(x) = (f(x), g(x)), \quad \forall x \in M.$$

Note que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$ son continuas, donde $\pi_1 : V \times V \to V$ y $\pi_2 : V \times V \to V$ son las proyecciones en la primera y segunda componente. Por la propiedad (3), h es continua.

Ahora, note que $f + g = s \circ h$, donde $s : V \times V \to V$ es la función suma $s(v, w) = v + w$, $\forall v, w \in V$. Por la propiedad de composición, basta probar que s es continua.

Sea $(v_0, w_0) \in V \times V$ y $\varepsilon > 0$.

$B(v_0 + w_0, \varepsilon) = \{u \in V \,/\, \|u - (v_0 + w_0)\| < \varepsilon\}$.

Sea $\delta = \varepsilon/2$. Para $(v, w) \in V \times V$ tal que $\tilde{d}((v, w), (v_0, w_0)) < \delta$, tenemos que

$$\|v - v_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \|w - w_0\| < \varepsilon/2.$$

Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \|s(v, w) - s(v_0, w_0)\| &= \|(v - v_0) + (w - w_0)\| \\ &\leq \|v - v_0\| + \|w - w_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Escaneado con CamScanner

$\therefore$ S es continua en (v_0, w_0). $\blacksquare$

5) <u>Continuidad del producto</u>: Sea (M, d) un espacio métrico, y $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones continuas, donde $\mathbb{R}$ se considera con la métrica usual. Entonces, la función $f \cdot g : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in M$$

es continua.

- <u>Demostración</u>: Siguiendo la idea de la demostración de (4), basta con probar que la función

$$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$m(x, y) = x \cdot y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

es continua, pero esto es algo conocido de cálculo en varias variables. $\blacksquare$

6) <u>Continuidad del cociente</u>: Sea (M, d) un espacio métrico y $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x) \neq 0 \ \forall x \in M$. Entonces, la función $\frac{f}{g} : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in M$$

es continua.

- <u>Demostración</u>: Similar al argumento de la parte (5) $\blacksquare$

<u>Algunas aplicaciones en espacios topológicos</u>

En ciertas ocasiones es posible demostrar que determinados subconjuntos de un espacio topológico son abiertos o cerrados a partir de la teoría de funciones continuas. En esta sección veremos algunos casos.

Escaneado con CamScanner

Proposición: Sean $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espacios métricos y $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ con la métrica del máximo. Si U_i es abierto en M_i para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $U_1 \times \cdots \times U_n$ es abierto en M.

• **Demostración:** Considere la proyección

$$\pi_i : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_i,$$

la cual es continua. Como U_i es abierto en M_i, tenemos que $\pi_i^{-1}(U_i) = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times U_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n$ es abierto en M. Por otro lado,

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} (M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times U_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i).$$

Por lo tanto, U es abierto en M, por ser una intersección finita de abiertos en M. ■

Proposición: Sean $f_1, \ldots, f_n : M \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y

$$U = \{ x \in M / f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0 \}.$$

Entonces, U es abierto en M.

• **Demostración:** Primero notamos que

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \quad \text{donde } U_i = \{ x \in M / f_i(x) > 0 \}.$$

Basta probar que cada U_i es abierto en M, porque así U será una intersección finita de abiertos en M, y por lo tanto abierto en M.

Ahora, $U_i = f_i^{-1}((0, +\infty))$ es abierto en M, ya que f_i es continua y $(0, +\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$. ■

Escaneado con CamScanner

Homeomorfismos

Cuando se estudian estructuras matemáticas, una de las preguntas a hacernos es cuándo dos estructuras son equivalentes. Por ejemplo, sabemos de álgebra lineal que todo espacio vectorial real de dimensión finita igual a n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, es decir, existe una transformación lineal $V \to \mathbb{R}^n$ invertible y cuya inversa es también una transformación lineal. Entonces, podemos pensar todos los espacios vectoriales reales de dimensión n simplemente como $\mathbb{R}^n$, y dos espacios de diferente dimensión no serán isomorfos.

El concepto de "ser isomorfo" en espacios métricos está dado por cierto tipo de funciones continuas, llamadas homeomorfismos.

<u>Definición</u>: Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y $f:(M,d)\to(N,\rho)$ una función continua. Diremos que f es un <u>homeomorfismo</u> si f es biyectiva y su inversa $f^{-1}:(N,\rho)\to(M,d)$ es también una función continua.

<u>Observación</u>: Para que una función continua $f:(M,d)\to(N,\rho)$ sea un homeomorfismo, no basta con pedir únicamente que f sea biyectiva, es decir, existen biyecciones continuas cuya inversa <u>no</u> es continua. Por ejemplo, sea $f:[0,1)\cup(2,3]\to[0,2]$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Vemos que f es continua en su dominio.

Por otro lado,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ y+1 & \text{si } 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

no es continua en $y = 1$.

Ejemplos:

1) Toda isometría sobreyectiva es un homeomorfismo.

Sea $f: (M, d) \to (N, \rho)$ tal isometría. Sabemos que las isometrías son continuas, por lo cual bastaría probar que f^{-1} es también una isometría. Sean entonces $y_1, y_2 \in N$. Luego, existen $x_1, x_2 \in M$ únicos tales que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Así,

$$d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = d(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) = \rho(y_1, y_2)$$

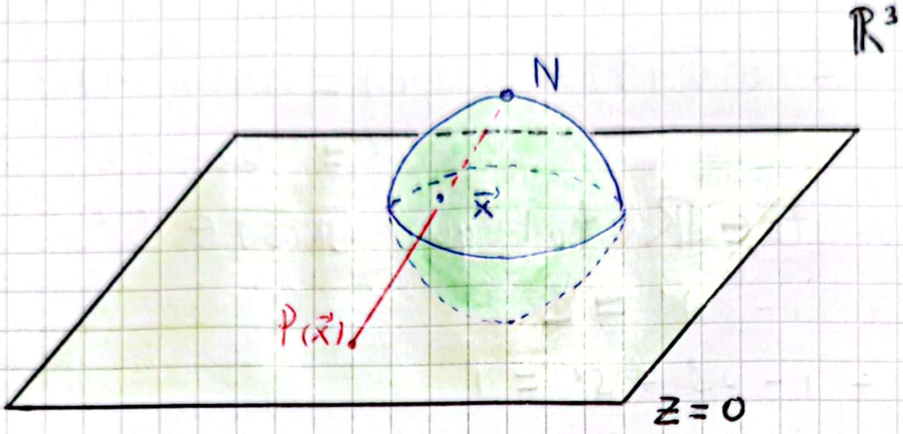
$\therefore$ f^{-1} es una isometría (continua), y f un homeomorfismo.

No todo homeomorfismo es una isometría, como es el caso de la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Escaneado con CamScanner

2) Proyección estereográfica:

Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $N = (0, 0, 1) \in S^2$.



Considere la recta que pasa por N y de dirección $\vec{x} - N$, donde $\vec{x} = (x, y, z) \in S^2 - \{N\}$. Sea $P(\vec{x})$ la intersección entre la recta anterior y el plano $z = 0$. Esto define una función bigectiva

$$P : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2.$$

Hallemos una expresión analítica para $P(\vec{x})$.

$$\ell :\ t(\vec{x} - N) + N = t(x, y, z-1) + (0, 0, 1) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$
$$= (tx, ty, tz + 1 - t).$$

Vemos que $tz + 1 - t = 0$ sii $1 = t - tz = t(1 - z)$

sii $t = \dfrac{1}{1 - z}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Note que } z \neq 1 \\ \text{ya que } \vec{x} \neq N\end{array}\right)$

Así, $P(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{1 - z}, \dfrac{y}{1 - z}\right)$, $\forall (x, y, z) \in S^2 - \{N\}$.

Esta función, llamada proyección estereográfica, es continua en $S^2 - \{N\}$ (por ser continua en $\mathbb{R}^3$ salvo en el punto N).

Para hallar la inversa de P, se sigue un procedimiento similar: tomar $(a, b, 0)$ en el plano $z=0$, construir la recta que pasa por $(a, b, 0)$ y $N=(0,0,1)$, y hallar su intersección con la esfera S^2

$$\Omega: s((a,b,0)-(0,0,1))+(0,0,1) = s(a,b,-1)+(0,0,1)$$
$$= (sa, sb, 1-s)$$

Ahora hallamos $s \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega(s) \in S^2$.

$$(sa)^2 + (sb)^2 + (1-s)^2 = 1$$
$$s^2a^2 + s^2b^2 + 1 - 2s + s^2 = 1$$
$$(a^2+b^2+1)s^2 = 2s.$$
$$(a^2+b^2+1)s = 2$$
$$s = \frac{2}{a^2+b^2+1}.$$

(Note que $s=0$ corresponde al punto N.)

Así, tenemos $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S - \{N\}$

$$Q(a,b) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$

Q es claramente continua en $\mathbb{R}^2$.

$\therefore$ P es un homeomorfismo de $S^2 - \{N\}$ a $\mathbb{R}^2$.

3) $(V, \|-\|)$ espacio vectorial real normado, $V_0 \in V$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$ fijos. Considere las siguientes funciones:

- $T_{V_0}: V \longrightarrow V$ (Traslación a lo largo de V_0)
  $T_{V_0}(v) = v + V_0$
- $m_{\lambda_0}(v) = \lambda_0 v$ (homotecia de razón λ_0)

T_{V_0} y m_{λ_0} son homeomorfismos de V sobre sí mismo (automorfismo). La composición

$$T_{V_0} \circ m_\lambda (v) = \lambda_0 V + V_0,$$

llamada transformación afín, es también un automorfismo de V.

<u>Observación</u>: En general, dado un espacio métrico (M, d), el conjunto de todos los automorfismos de (M, d) es un grupo (no abeliano) con la operación de composición, donde el elemento neutro $id: M \to M$ es la función identidad. Las isometrías sobreyectivas de (M, d) forman un subgrupo del grupo anterior.

Volviendo al ejemplo, si $B(v, r)$ y $B(w, \varepsilon)$ son dos bolas abiertas en V, entonces ambas son homeomorfas. Se puede construir tal homeomorfismo a partir de traslaciones y homotecias.

$$T: B(v, r) \longrightarrow B(w, \varepsilon)$$
$$T(x) = w + \frac{\varepsilon}{r}(x - v).$$

4) <u>Inmersiones homeomórficas</u>:

Una función continua $f: (M, d) \to (N, \rho)$ es una **inmersión homeomórfica** si $f: M \to f(M)$ es un homeomorfismo.

- Por ejemplo, si (M_1, d_1) y (M_2, d_2) son espacios métricos y $M = M_1 \times M_2$, equipado con la métrica del máximo, entonces para $x_0 \in M_1$ e $y_0 \in M_2$, las inclusiones $i_{x_0}: M_2 \to M_1 \times M_2$ e $i_{y_0}: M_1 \to M_1 \times M_2$ son inmersiones homeomórficas.
- La función $\varphi: [0, 1) \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$
no es una inmersión ($\varphi: [0, 1) \to S^1$ no tiene inversa continua).

Escaneado con CamScanner

Finalizamos estas notas con un teorema que caracteriza los homeomorfismos.

Teorema de caracterización: Sea $f:(M,d)\to(N,\rho)$ una biyección continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es un homeomorfismo.

(b) f es una aplicación abierta

(c) f es una aplicación cerrada ($f(C)$ es cerrado en N para todo C cerrado en M).

• **Demostración:**

(a) $\Rightarrow$ (b) f^{-1} es continua. Sea $U\subseteq M$ abierto en M. Luego $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en N. Por otro lado,

$$f(U)=(f^{-1})^{-1}(U).$$

$\therefore f(U)$ es abierto en N.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $U\subseteq M$ abierto en M. Luego, como f es abierta, tenemos que $f(U)$ es abierto en N. Pero $f(U)=(f^{-1})^{-1}(U)$. Por lo tanto, f^{-1} es continua

La equivalencia (a) $\Leftrightarrow$ (c) es similar. Solo basta notar que una función $g:(M,d)\to(N,\rho)$ es continua si y solamente si $g^{-1}(C)$ es cerrado en M para todo cerrado C en N. $\blacksquare$