

Capítulo 4

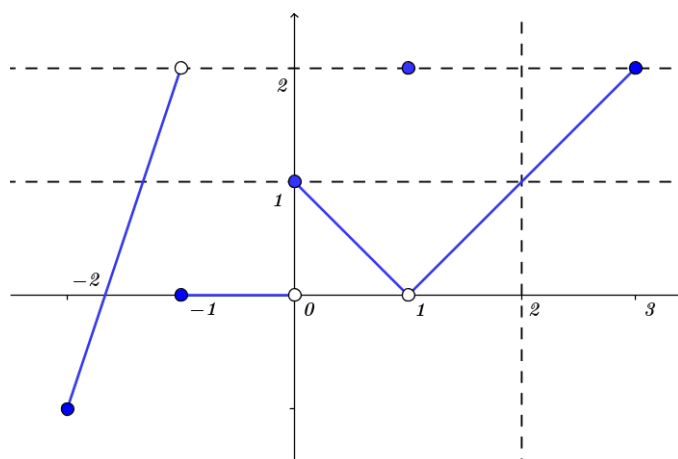
Límites

4.1. Interpretación geométrica de límites

En esta sección no se piden pruebas formales.

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen

a) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

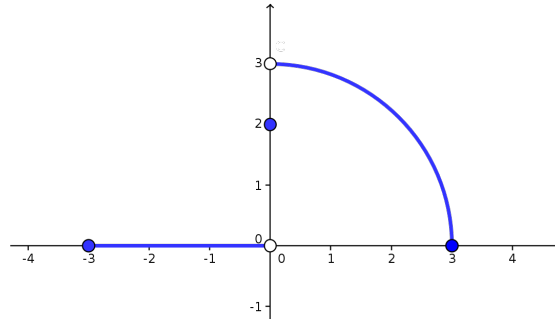


Calcular

e) $g(-1)$ f) $g(0)$ g) $g(1)$ h) $g(2)$

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí explique por qué

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 2 \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 3$$



3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Bosquejar la función f y determinar en qué puntos existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - \cos(x)$.

Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x| < \delta$, para los valores $\varepsilon = 10^c$ (con $c \in \{0, -1, \dots, -6\}$).

Para esto ir a la página de EVA [Tema 3: Límites y continuidad - Práctico y materiales asociados](#) y utilizar la visualización del gráfico.

4.2. Definición y propiedades básicas de límites

1. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x en el dominio de f que verifique las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

$$a) f(x) = x^2, a = 0 \quad b) f(x) = \frac{1}{x}, a = 1 \quad c) f(x) = \sqrt{|x|}, a = 0$$

$$d) f(x) = x^2, a \in \mathbb{R} \quad e) f(x) = \frac{1}{x}, a \in \mathbb{R}^+ \quad f) f(x) = \sqrt{|x|}, a \in \mathbb{R}$$

2. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 10^{-5}$ para todo x en el dominio de f que verifica las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$.

$$a) f(x) = x^2 + \sqrt{x}, a = 0 \quad b) f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}, a = 1 \quad c) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, a = 1$$

$$d) f(x) = x \cos(x^2), a = 0 \quad e) f(x) = \frac{x}{2 - \sin^2(x)}, a = 0$$

$$f) f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), a = 0 \quad g) f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right), a = 0$$

3. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

a) (Definición de límite)

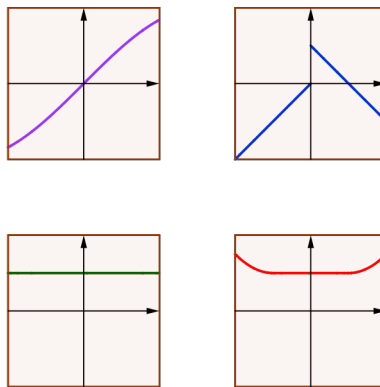
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

b) $\exists \epsilon > 0$ y $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

c) $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

d) $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

Determinar las implicancias entre ellas. Determinar para los gráficos de la imagen cuales verifican que variante de definición cumplen tomando $p = 0$.



4. Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$.

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $h(x) = f(x) + \lambda$ verifica que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \lambda + a$.

b) Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = a + b$.

c) Dada una función h , probar que el límite $\lim_{x \rightarrow p} f(x) + h(x)$ existe si solo si el límite $\lim_{x \rightarrow p} h(x)$ existe. *Sugerencia: recordar que existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ por hipotesis del ejercicio.*

d) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

e) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = ab$.

f) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \frac{a}{b}$.

- g) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{f(x)}$.
- h) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim_{x \rightarrow p} r(x) = 0$.
- i) Suponga que $f(x) \leq g(x), \forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x) \forall x \neq p$ y con $a = b$.
- j) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = a$.
- k) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = b$.

5. En cada caso, determinar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (asumiendo que existe tal límite):

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{x} = 1, a = 3$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1, a = -2$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1, a = 4$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x)} = 5, a = 0$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{e^x - 1} = 3, a = 0$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\log(x)} = 1, a = 1$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - 1}{x} = 1, a = 8$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3 + 1)}{x^2 + 1} = 1, a = 2$

6. En cada caso, determinar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (asumiendo que existe tal límite):

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2f(x) - 1}}{f(x)} = 1, a = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2f(x) - x}}{f(x)} = 1, a = 1$

7. Funciones monótonas

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $a \in \mathbb{R}$.

- a) Probar que, dado $d > 0$, el conjunto $C_d = \{f(x) : 0 < x - a \leq d\}$ está acotado.
- b) Verificar que si $d_1 < d_2$, entonces $C_{d_1} \subset C_{d_2}$. En particular, $\inf(C_{d_1}) \geq \inf(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1}) \leq \sup(C_{d_2})$.
- c) Probar que $\sup(C_{d_i}) \leq f(a + d_i)$ e $\inf(C_{d_i}) \geq f(a)$.
- d) Verificar que, dado $\epsilon > 0$, existen $y_\epsilon \in C_d$ y $x_\epsilon > a$ tal que $y_\epsilon - \inf(C_d) = |y_\epsilon - \inf(C_d)| \leq \epsilon$ y $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$. Sea $\delta = x_\epsilon - a > 0$, probar que para todo $x \in C_\delta$ se tiene que $f(x) - \inf(C_\delta) = |f(x) - \inf(C_\delta)| \leq \epsilon$.
- e) Deducir que existe el límite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Mostrar de forma análoga que existe el límite $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- f) Dar un ejemplo de una función monótona tal que no existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4.3. Cálculo de límites

Esta sección está orientada al cálculo de límite por lo que podrán asumir la continuidad de los polinomios, la función raíz cuadrada y la función logaritmo (muchas de las cuales ya probaron o se vieron en teórico). Además, se asumirá la continuidad de las funciones trigonométricas en su dominio (sin, cos, tan), así como la desigualdad $|\sin(x)| \leq |x|$.

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4} & b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} + 1 & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\
 d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x} & e) \lim_{x \rightarrow 1} \log(x) + x & f) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) + \cos(x) \\
 g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2} \\
 i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1} \\
 l) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} & m) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} & n) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}
 \end{array}$$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} [x] - \lfloor x \rfloor & b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{([x] - x)^3} \\
 c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^2} & d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x|}{x^5 - 5x^4 + 6x^2 + 4x - 8} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2 - |x|}{|x^2 - x|} \\
 f) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] & g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \right] & h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \right]
 \end{array}$$

3. Sean $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = [x]$ y $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Determinar para que valores de a existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

4. Polinomios

Sean $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$.

Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q . Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x-a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si y sólo si } n_1 > m_1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \text{ si y sólo si } n_1 = m_1$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \text{ si y sólo si } n_1 < m_1$$

d) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ e) Probar que, dado un polinomio P , siempre existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - P(a)}{x - a}$.

5. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

6. Calcular las indeterminaciones de logaritmo

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log(x) : a > 1$$

7. Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x)$

4.4. Límites en infinito

1. Construir ejemplos explícitos de funciones que verifiquen los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ y } f \text{ no constante}$$

2. Polinomios II

Sean $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$. Probar que:

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si y sólo si } n < m$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ si y sólo si } n = m$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{signo}(a_n b_m) \infty \text{ si y sólo si } n > m$$

d) Calcular los siguientes limites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 - (2(x + 5) + 3) \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{(2(x + 5) + 3)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)^2 - x^2 \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)^2}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 10x - 1}{10x^2 + 1} \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 1}{x^3 - 10x - 1} \quad g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100x^2 + x}{x^3 - 100x}$$

3. Decimos que una función tiene como *asíntota* a la recta r cuando x tiende a infinito si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - r(x) = 0$$

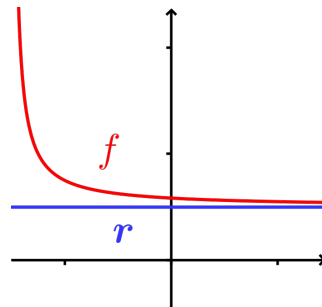


Figura 4.1: Ejemplo gráfico de una asíntota

Determinar si las siguientes funciones tienen asíntota en $+\infty$ y, en caso de tener, calcularlas.

$$a) f(x) = \frac{1}{x} \quad b) f(x) = x + \frac{1}{x} \quad c) f(x) = \frac{3x + 3}{2x - 4}$$

$$d) f(x) = \arctan(x) \quad e) f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad f) f(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 1} \quad h) f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x - 1} \quad i) f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{x + 1}$$

4. Funciones de Lipschitz

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lipschitz

Probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \forall n > 1$$

Deducir que si P es un polinomio y es una función de Lipschitz, entonces $P(x) = ax + b$.

5. Dé un ejemplo de función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor f(x) \rfloor = a \in \mathbb{R}$ pero que no exista el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Dé un ejemplo de función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ pero que no exista el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor f(x) \rfloor$.

6. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x+1 \rfloor - \lfloor x \rfloor \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x+1/2 \rfloor - \lfloor x \rfloor \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} - \lfloor x \rfloor \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \lfloor 2x \rfloor$$

7. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos(x) \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sin^2(x)}{x^2 + x + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{2x^6 + x^5 + 1}} \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} \quad h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^n} \quad i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+e^x}}{x^3 + 2x + 2}$$

8. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 1} - \sqrt{x^4 + 4x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x+1) - \sin(x) \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x+1) - \log(x) \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1} - e^x$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = \lfloor t \rfloor$

Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t - f(t) dt$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3} \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt - \frac{x(x-1)}{2}$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona.

- a) Probar que si f está acotada, entonces existe el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y es finito.
- b) Probar que si f monótona creciente y no está acotada superiormente, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- c) Dar un ejemplo de una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que no exista el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4.5. Continuidad

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, donde además se tiene la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	4	2	3	4	0	7	2	1
g(x)	5	3	1	0	7	6	4	2

Calcular los siguientes limites

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x - 2) + g(x + 2)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) - g(f(x))$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x) + 1) - 2g(x + 2)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x) + 1) - 2f(x + 2)$

2. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ (la distancia al entero más cercano)
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$
- c) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.
- d) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
- e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)$ = el primer número del desarrollo decimal de x .
- f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)$ = el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

3. Determinar para qué $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua

- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} \log(x + 1) & \text{si } x > 0 \\ (x + a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ a \sin(x + b) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$$e) f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a^2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(\frac{x}{5})}{x-5} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\sqrt{x})}{2x-4} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x+x^2}$$

5. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ en los siguientes casos

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que f no es continua en 0.

7. a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.
 b) Si g es una función continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.
 c) Probar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0.

8. Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x, \forall x \in (0, 1]$.
 b) Probar que f es continua en $x = 0$.
9. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0, 0)$ y radio r . Notamos P el punto $(0, r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2 . Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x . Notar que el punto R es una función del radio de C_2 , es decir r .

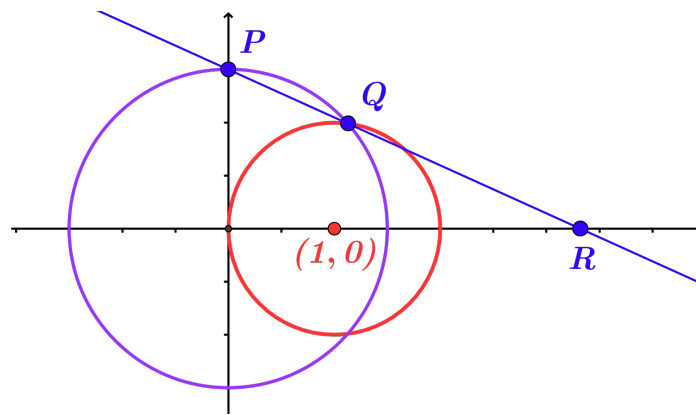


Figura 4.2: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \rightarrow 0^+$?

10. **Funciones monótonas**

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Definimos $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $h(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Probar que g es continua por derecha, es decir, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$.

Probar que h es continua por izquierda.

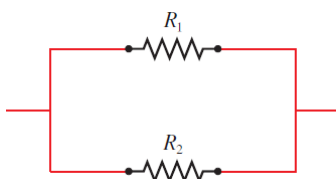
4.6. **Aplicaciones**

1. **Circuitos eléctricos**

- a) La ley de Ohm para circuitos eléctricos como el que se muestra en la figura establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje (en volts), I es la corriente (en amperes) y R es la resistencia (en ohms). A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5 \pm 0,1$ amperes. ¿En qué intervalo debe encontrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0 = 5$?



- b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R está dada por $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.



Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2 = 10$ ohms, calcule la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x)$ = la resistencia de tomar $R_1 = x$ ohms.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interprete estos resultados.

2. Se quiere construir un círculo de área 4m^2 . Calcular el radio de dicho círculo. Admitiendo una tolerancia al error en el área de $\pm 0,1\text{m}^2$, determinar la tolerancia de error en el radio de dicho círculo.
3. Tenemos una caja de madera de masa m apoyada en el suelo (también de madera) en reposo. Empezamos a aplicarle una fuerza, digamos $F_1(t) = tN$ (una cantidad de t Newton en el instante t). Al principio la caja no se moverá, esto es debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre la caja contraresta la nuestra, obteniendo así que la fuerza neta sobre la caja sea 0. A la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre la caja cuando esta está en reposo se le llama *fuerza de rozamiento estática*.

Cuando se sobrepasa un valor crítico $\mu_s mg$, la caja empieza a moverse y la fuerza de rozamiento pasa a ser dinámica $\mu_k mg$.

En este caso $\mu_s = 0,7$ y $\mu_k = 0,4$, estas constantes están determinadas por el material de las superficies (en este caso ambas de madera).

- a) Bosquejar la función $F_1(t)$, la fuerza que ejercemos sobre la caja, y determinar en que puntos es continua.
- b) Bosquejar la función $F_2(t)$ la fuerza que ejerce el suelo sobre la caja. En que puntos F_2 es continua.
- c) Bosquejar $F(t)$ la fuerza resultante sobre la caja y determinar en que puntos es continua.
- d) Definimos la función $x(t)$ la función posición de la caja en función del tiempo. Discutir sobre como podría ser el bosquejo del desplazamiento de la caja. En que puntos esta función sería continua.

4. Relatividad

- a) Contracción de Lorentz

En la teoría de relatividad, la fórmula de de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz.

1) Calcule $\lim_{v \rightarrow 0} L(v)$

2) Encuentre $\lim_{v \rightarrow c^-} L(v)$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

b) En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \rightarrow c^-$?

5. La fuerza de gravedad ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(x) = \begin{cases} \frac{GMx}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿ F es una función continua de r ?

4.7. Complementarios

1. Describir todos los posibles casos de límites para cocientes de polinomios.

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g es estrictamente creciente y continua.

Probar que $\lim_{x \rightarrow g(a)} f(x)$ existe si solo si $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x)$ existe.

3. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x}}{2x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - x}{\sqrt{x}-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$

4. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x-1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

- (I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(1, \delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.
- (II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1, \delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.
- (III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$
- (IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Entonces:

- (A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.
- (B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.
- (C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
- (D) Solamente la afirmacion (IV) es verdadera.
- (E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.
5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } \frac{p}{q} \text{ fracci3n irreducible} \end{cases}$$

Probar que es discontinua en \mathbb{Q} y continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. L3mites trigonom3tricos

La idea de este ejercicio es deducir de forma geométrica algunas desigualdades trigonométricas y a partir de ellas calcular algunas indeterminaciones trigonométricas.

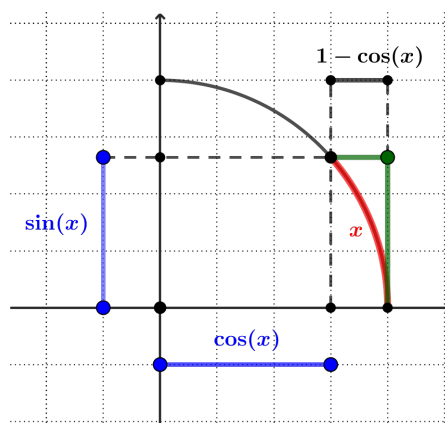


Figura 4.3: se muestran intervalos de largo $\cos(x)$, $\sin(x)$, $1 - \cos(x)$, y un arco de longitud x

- a) A partir de la figura 4.3 deducir que $0 \leq \sin(x) \leq x \leq \sin(x) + 1 - \cos(x)$ para $x \in [0, \pi/2]$.

b) Utilizando que $(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) = \sin^2(x)$, probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

c) Probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

d) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(x)}{x}$

7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Probar que f es continua.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Sean $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$h(x) = \begin{cases} I_*(f, [0, x]) & \text{si } x \geq 0 \\ I_*(f, [x, 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} I^*(f, [0, x]) & \text{si } x \geq 0 \\ I^*(f, [x, 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Probar que las funciones g y h son continuas.

9. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ y son iguales, entonces existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y además.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en 0.

10. Funciones convexas

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

a) Probar que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ entonces f es decreciente. Pruebe que si f no es decreciente entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Probar que si f es monótona entonces es continua.

c) Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona y convexa que no sea continua.

d) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y monótona creciente. Pruebe que $g \circ f$ es convexa. Demuestre que si g no es monótona creciente, $g \circ f$ no es necesariamente convexa.