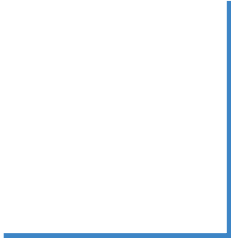




Teoría de Lenguajes

R_M
AFD Mínimo



Relación R_L (repaso)

Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$

$x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que:

$$xz \in L \wedge yz \in L \quad \text{o} \quad xz \notin L \wedge yz \notin L$$

Relación R_L (cont.)

Ejemplo

Lenguaje de las tiras de **a**'s y **b**'s con al menos dos **a**'s consecutivas

Clases:

- tiras sin **a**'s o que no tienen dos **a**'s consecutivas y terminan en **b** (+)
- tiras sin **a**'s o que no tienen dos **a**'s consecutivas y terminan en **a**
- tiras que tienen dos **a**'s consecutivas (o más)

(+) incluye a la tira ϵ

Relación R_L (cont.)

Podemos incluso asociar una ER a cada clase:

- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **b**

incluye a la tira ϵ

$$(b \mid ab)^*$$

- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **a**

$$(b \mid ab)^* a$$

- tiras que tienen dos a's consecutivas (o más)

$$(a \mid b)^* aa (a \mid b)^*$$

Relación R_M

Definición:

Dado un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y dos tiras $x, y \in \Sigma^*$ se dice que

$$x R_M y \iff \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$$

R_M es una relación de equivalencia

Existe una relación entre R_L y R_M

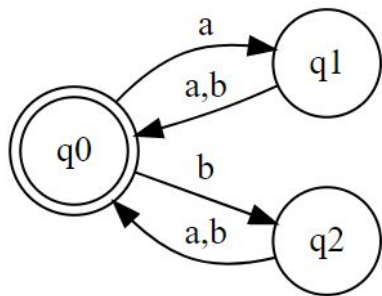
Relación R_M (cont.)

- Si $xR_My \Rightarrow xR_Ly$ ✓
- Si $xR_Ly \Rightarrow xR_My$ ¿?

No necesariamente...

Dependerá del autómata M

Relación R_M (cont.)



$a R_L b$ ✓
 $a R_M b$ ✗

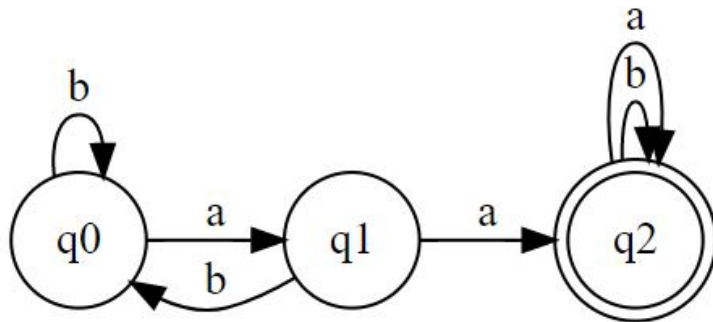
En el ejemplo, R_L tiene 2 clases R_M tiene 3

- Cada clase de R_L es una o la unión de varias clases de R_M
- La cantidad de clases de R_M ($\#R_M$) es la cantidad de estados de M
- $\#R_M \geq \#R_L$

Relación R_M (cont.)

La idea es poder asociar una **expresión regular** (ER) a cada estado, de aquellas tiras que llegan a él

Ejemplo:



$q_0: (b|ab)^* \rightarrow [\epsilon]$

$q_1: (b|ab)^*a \rightarrow [a]$

$q_2: (b|ab)^*aa(a|b)^* \rightarrow [aa] \quad \text{o} \quad (a|b)^*aa(a|b)^*$

Relación R_L

Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$

$x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que:

$$xz \in L \wedge yz \in L \quad \text{o} \quad xz \notin L \wedge yz \notin L$$

Relación R_M

Dado un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y dos tiras $x, y \in \Sigma^*$ se dice que

$$x R_M y \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$$

Teorema de Myhill - Nerode

Entonces, si se construye un AFD donde cada clase de R_L tiene asociado un estado, ese autómata es el AFD Mínimo

Teorema (enunciado)

L es Regular $\Leftrightarrow \#R_L$ es finita

Teorema de Myhill - Nerode

$(\Rightarrow)$ L es Regular $\Rightarrow \#R_L$ es finito ✓

$(\Leftarrow)$ $\#R_L$ es finito $\Rightarrow L$ es Regular

Se construye un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ /

- Q : son las clases de R_L
- $q_0 : [\epsilon]$
- $F : \{ [x] / x \in L \}$ ($[x]$ es el representante de varias $x \in L$)
- $\delta : \delta([x], a) = [xa]$ ($[xa]$ es el representante la clase de x concatenado con a)

$$M \text{ acepta } x \Leftrightarrow \delta^*([\epsilon], x) \in F \Leftrightarrow [x] \in F \Leftrightarrow x \in L$$

De donde $L = L(M) \Rightarrow L$ es Regular

Corolario de Myhill - Nerode

Para todo lenguaje regular, existe y es único el AFDM

(a menos de un renombramiento de estados)

Algoritmo de Minimización

Definiciones previas

- ❖ Se dice que dos estados p y q son **distinguibles**, si $\exists x \in \Sigma^*$ /

$$\delta^{\wedge}(p,x) \in F \text{ y } \delta^{\wedge}(q,x) \notin F$$

- ❖ Se dice que dos estados son **equivalentes**, si $\forall x \in \Sigma^*$ se cumple

$$\delta^{\wedge}(p,x) \in F \Leftrightarrow \delta^{\wedge}(q,x) \in F$$

Algoritmo de Minimización

Dado un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ obtener un AFDM $M' : (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

- 1) Construir una Π_0 con 2 conjuntos: F y $Q-F$
- 2) $\Pi_{\text{actual}} \leftarrow \Pi_0$
- 3) Para cada conjunto C_i de la Π_{actual} hacer
 - Para cada par de estados p y $q \in C_i$ y para cada $a \in \Sigma$ calcular
 - $\delta(p, a) = s$ y $\delta(q, a) = t$
 - Si $s \in C_i$ y $t \in C_i$ entonces p y q van a pertenecer al mismo C'_k de una nueva Π
- Fin para
- Fin para
- 4) Sea Π_{nueva} la nueva partición formada
- 5) Si $\Pi_{\text{nueva}} \neq \Pi_{\text{actual}}$ entonces $\Pi_{\text{actual}} \leftarrow \Pi_{\text{nueva}}$ y volver a 3
- sino $\Pi_{\text{final}} \leftarrow \Pi_{\text{nueva}}$

Algoritmo de Minimización (cont.)

El AFDM $M' : (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ queda determinado de la siguiente manera:

- $Q' : \{ C_k / \text{cada } C_k \text{ es una clase de la } \Pi_{\text{final}} \}$
- $q'_0 : C_k$ que contiene a q_0
- $F' : \{ C_k / C_k \text{ es una clase de la } \Pi_{\text{final}} \text{ y está formada por estados } q \in F \}$
- $\delta'(C_k, a) = C_j$ si $\delta(q, a) = p \quad \forall a \in \Sigma$, siendo $q \in C_k$ y $p \in C_j$

Aplicación: