Teoría de Lenguajes

AFD Mínimo

Relación R_L (repaso)

Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$

$x \, R_L \, y \iff \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que:

$$xz \in L \wedge yz \in L \quad \text{o} \quad xz \notin L \wedge yz \notin L$$

Relación R_L (cont.)

Ejemplo

Lenguaje de las tiras de **a**'s y **b**´s con al menos dos **a**'s consecutivas

Clases:

- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **b**
- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **a**
- tiras que tienen dos a's consecutivas (o más)

Relación R_L (cont.)

Podemos incluso asociar una ER a cada clase:

- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **b**
  (b | ab)*
- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **a**

  (b | ab)* a
- tiras que tienen dos a's consecutivas (o más)
  (a | b)* aa (a | b)*

Relación R_M

Definición:

Dado un AFD $M : (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ y dos tiras $x, y \in \Sigma^*$ se dice que

$$x \, R_M \, y \Leftrightarrow \delta\hat{}(q_0,x) = \delta\hat{}(q_0,y)$$

R_M es una relación de equivalencia

Se va a ver que existe una relación entre R_L y R_M

Relación R_M (cont.)

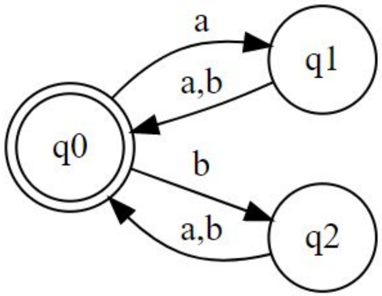
- Si $x \, R_M \, y \implies x \, R_L \, y$ √

- Si $x \, R_L \, y \implies x \, R_M \, y$ ¿?

  No necesariamente…

  Dependerá del autómata M

Relación R_M (cont.)



a R_L b √

a R_M b ✗

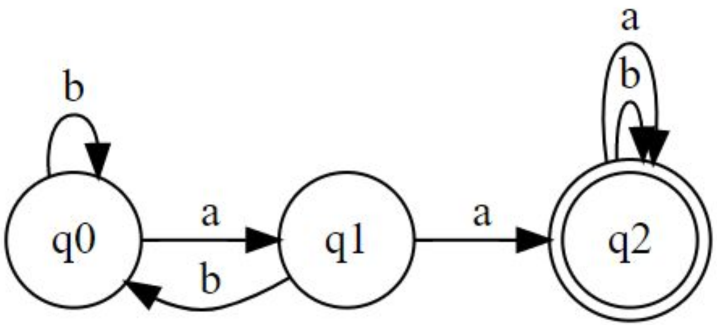
En el ejemplo, R_L tiene 2 clases R_M tiene 3

- Cada clase de R_L es una o la unión de varias clases de R_M
- La cantidad de clases de R_M ($\#R_M$) es la cantidad de estados de M
- $\#R_M \geq \#R_L$

Relación R_M (cont.)

La idea es poder asociar una ***expresión regular*** (ER) a cada estado, de aquellas tiras que llegan a él

Ejemplo:



q_0: (b|ab)* → [ε]

q_1: (b|ab)*a → [a]

q_2: (b|ab)*aa (a|b)* → [aa] o (a|b)*aa (a|b)*

Teorema de Myhill - Nerode

Entonces, si se construye un AFD donde cada clase de R_L tiene asociado un estado, ese autómata es el AFD Mínimo

Teorema (enunciado)

L es Regular $\Leftrightarrow$ $\#R_L$ es finita

Teorema de Myhill - Nerode

($\Rightarrow$) L es Regular $\Rightarrow$ $\#R_L$ es finito √

($\Leftarrow$) $\#R_L$ es finito $\Rightarrow$ L es Regular

Se construye un AFD $M : (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ /

- Q: son las clases de R_L
- q_0: $[\varepsilon]$
- F: $\{ [x] / x \in L \}$ ($[x]$ es el representante de varias $x \in L$)
- δ: $\delta([x],a) = [xa]$ ($[xa]$ es el representante la clase de x concatenado con **a**)

M acepta x $\Leftrightarrow$ $\delta\hat{}([\varepsilon],x) \in F \Leftrightarrow [x] \in F \Leftrightarrow x \in L$

De donde $L = L(M)$ $\Rightarrow$ L es Regular

Corolario de Myhill - Nerode

Para todo lenguaje regular, existe y es único el AFDM

(a menos de un renombramiento de estados)

Algoritmo de Minimización

Definiciones previas

- Se dice que dos estados *p* y *q* son ***distinguibles***, si $\exists$ x $\in \Sigma^*$ /

  $$\boldsymbol{\delta}^\wedge(p,x) \in F \quad y \quad \boldsymbol{\delta}^\wedge(q,x) \notin F$$

- Se dice que dos estados son ***equivalentes***, si $\forall$ x $\in \Sigma^*$ se cumple

  $$\boldsymbol{\delta}^\wedge(p,x) \in F \iff \boldsymbol{\delta}^\wedge(q,x) \in F$$

Algoritmo de Minimización

Dado un AFD $M : (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ obtener un AFDM $M' : (Q',\Sigma,\delta',q'_0,F')$

1) Construir una Π_0 con 2 conjuntos: F y Q–F
2) Para cada conjunto C_i de la Π_{actual} hacer

   Para cada par de estados ***p*** y **q** C_i y para cada ***a*** $\in \Sigma$ calcular

   $\delta(p,a) = \boldsymbol{s}$ y $\delta(q,a) = \boldsymbol{t}$

   Si $s \in C_j$ y $t \in C_j$ entonces *p* y *q* van a pertenecer al mismo C'_k de una nueva Π

   Fin para

   Fin para
3) Sea Π_{nueva} la nueva partición formada
4) Si $\Pi_{nueva} \neq \Pi_{actual}$ entonces $\Pi_{actual} \leftarrow \Pi_{nueva}$ y volver a 2

   sino FIN

Algoritmo de Minimización (cont.)

El AFDM M' : $(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ queda determinado de la siguiente manera:

- Q': { C_k / cada C_k es una clase de la Π_{final} }
- q'_0: C_k que contiene a q_0
- F': { C_k / C_k es una clase de la Π_{final} y está formada por $q \in F$ }
- $\delta'(C_k, a) = C_j$ si $\delta(q,a) = p$ $\forall\, a \in \Sigma$, siendo $q \in C_k$ y $p \in C_j$

Aplicación: