Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 2
Primer semestre 2024

PRÁCTICO 4: Números primos y Teorema fundamental de la Aritmética.

Ejercicio 1. Se consideran los siguientes números naturales:

$$a = 1485000, \quad b = 15^4 \times 42^3 \times 56^5, \quad c = 15!, \quad d = 1485000^3, \quad e = (15!)^5.$$

Para cada número:

a. Halllar la descomposición en factores primos.

b. Determinar la cantidad de divisores positivos.

c. Determinar si es un cuadrado perfecto.

Ejercicio 2.

a. Hallar el menor número natural n tal que $6552 \times n$ sea un cuadrado perfecto.

b. Hallar el menor número natural m para el cual $1260 \times m$ sea un cubo perfecto.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan:

a. $a^2 = 8b^2$. **b**. $a^2 = 3b^3$. **c**. $7a^2 = 11b^2$.

Ejercicio 4. Determinar el menor cuadrado perfecto que es divisible entre 7!.

Ejercicio 5. Hallar los números naturales $n \leq 1000$ que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

Ejercicio 6. Hallar los números naturales a y b que cumplen: $\operatorname{mcd}(a, b) = 18$, a tiene 21 divisores positivos y b tiene 10 divisores positivos.

Ejercicio 7. Sean a y b enteros positivos. Demostrar que: $\operatorname{mcd}(a^n, b^n) = \operatorname{mcd}(a, b)^n, \ \forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 8. Demostrar que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ si y solamente si n tiene un número impar de divisores positivos.

Ejercicio 9. Demostrar que $\sqrt{pq}$ y $\log_{30}(pq)$ son irracionales para cualquier par de primos distintos p, q.

Ejercicio 10.

a. Probar que un número de la forma: $99\ldots99$, con una cantidad par de 9s, no puede ser cuadrado perfecto. Sugerencia: usar que $n^2 + 1$ no es cuadrado perfecto para ningún $n \in \mathbb{N}$.

b. Probar que $11\ldots11$, con una cantidad par de 1s, no puede ser cuadrado perfecto.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 11. Sea (p_n) la sucesión de los números primos. Es decir: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.

a. Probar que se cumple: $p_1 p_2 \dots p_n + 1 \geq p_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.
Sugerencia: razonando por absurdo, probar que $\exists \, n \in \mathbb{N}$, tal que ningún primo divide a $p_1 p_2 \dots p_n + 1$.

b. ¿Es cierto que $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ejercicio 12.

a. ¿Existen dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 311?

b. ¿Existen dos cubos cuya suma sea 311? Sugerencia: observar que $f(x, y) = x^3 + y^3$ tiene raíz $x = -y$, y usar esto para factorizar $x^3 + y^3$.

Ejercicio 13. En el pasillo de un hospital hay 2014 habitaciones, numeradas del 1 al 2014. En un principio están todas las puertas cerradas. Cuando pasa el primer paciente, abre la puerta de cada habitación. Luego pasa el segundo paciente y cierra las puertas $2, 4, 6, 8, \dots$. Pasa el tercer paciente y cambia de estado las puertas $3, 6, 9, 12, \dots$ (es decir, la cierra si estaba abierta y la abre si estaba cerrada). Así hasta que pasa el paciente 2014, que cambia de estado la puerta 2014. ¿Cuántas puertas abiertas quedan luego de pasar los 2014 pacientes?

Ejercicio 14.

a. Probar que si $p > 2$ es primo, entonces es de la forma $4k+1$ o $4k+3$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Sugerencia: trabajar con el resto de una división entera, analizando cada posible valor del resto.

b. Probar que si $p > 3$ es primo, entonces es de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

c. Probar que existen infinitos primos de la forma $4k+3$. Sugerencia: imitar la prueba de Euclides sobre la infinitud de primos.