Introducción al Control Industrial

Solución Práctico 3

Respuesta Temporal y Acciones de Control

2024

1) Indicar a cuál curva de la figura de la derecha corresponde la respuesta al escalón de los sistemas.

La curva (1) corresponde a la respuesta al escalón de la transferencia $H(s) = \frac{5}{s^2+2s+5}$. Debido a que es un sistema subamortiguado ($\zeta \simeq 0.46 < 1$) y es la única respuesta que presenta oscilaciones con amplitud 1.

La curva (2) corresponde a la respuesta al escalón de la transferencia $H(s) = \frac{2}{s+2}$. De la curva se observa que para tiempos cercanos a 0 la respuesta comienza de forma lineal, por lo que la transferencia es de orden 1 y por tanto, $H(s) = \frac{2}{s+2}$. A su vez se observa que al $63,2\%$ de la respuesta, el tiempo transcurrido equivale a $t = 0.5s$, lo que es coherente con la constante de tiempo del sistema.

La curva (3) corresponde a la respuesta al escalón de la transferencia $H(s) = \frac{4}{s^2+4s+4}$. Esto se deduce debido a que el valor en régimen del sistema es 1, es de segundo orden (derivada nula en t = 0) y no presenta oscilaciones ya que $\zeta = 1$.

La curva (4) corresponde a la respuesta al escalón de la transferencia $H(s) = \frac{4}{s^2+4s+5}$. Esto se puede deducir debido a que el valor en régimen de la transferencia es 0.8.

2) Calcular para qué valores de K la respuesta al escalón del sistema realimentado es oscilatoria.

Se procede a hallar la transferencia global del sistema. Para esto se define una la señal $e(t)$ como la salida del bloque sumador.

$$E(s) = U(s) - KY(s) \quad (1)$$
$$Y(s) = H(s)E(s) \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$Y(s) = H(s)U(s) - KH(s)Y(s)$$
$$Y(s)(1 + KH(s)) = H(s)U(s)$$
$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{H(s)U(s)}{1+KH(s)} = ... = \frac{1}{s^2+as+K}$$

Para una entrada escalón, la respuesta es oscilatoria si $0 < \zeta < 1$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+as+K} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\Rightarrow K = \omega_n^2, \; a = 2\zeta\omega_n$

De ahí se despeja:

$\omega_n = \sqrt{K}, \; \zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}}$

Entonces, para que la respuesta sea oscilatoria:

$$1 > \frac{a}{2\sqrt{K}} > 0 \Rightarrow \sqrt{K} > \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow K > \frac{a^2}{4}$$

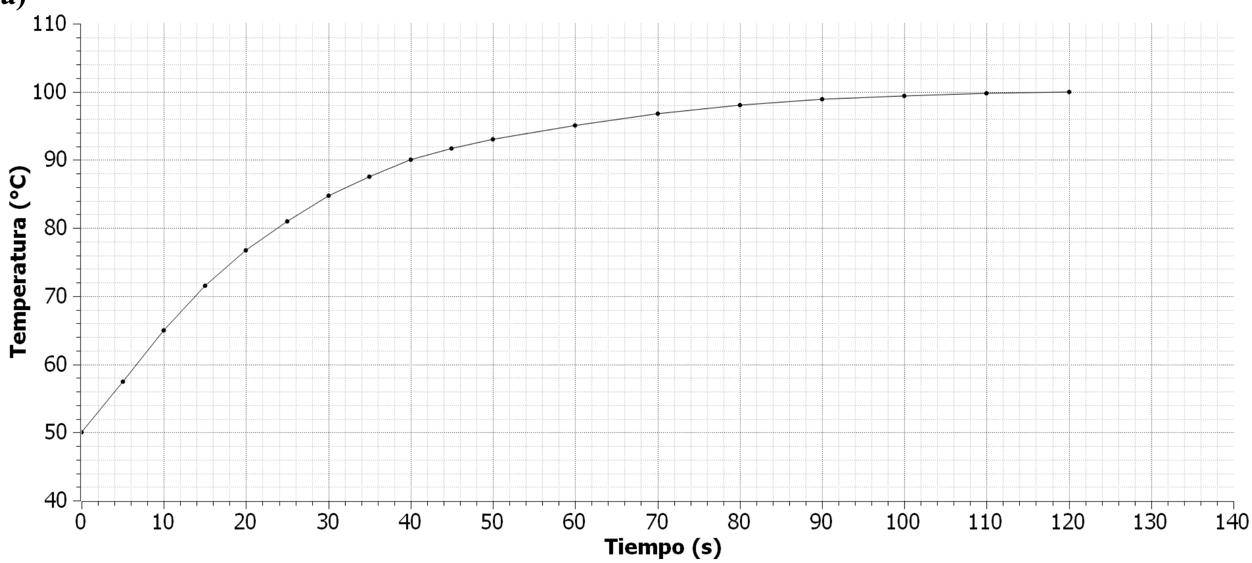
Otro método:

También se puede interpretar del lado de que la respuesta es oscilatoria si los polos de la transferencia son complejos conjugados, lo cual se impone con el discriminante menor que cero:

$s^2 + as + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4K}}{2}$, por lo que $\forall K > \frac{a^2}{4}$ la respuesta es oscilatoria.

3)

a)



- $t_{95\%} = 76s$
- $t_r = 10.76s$
- $\tau = 25.5s$

b)

- $Mp \simeq 73\%$

- $t_r \simeq 0.27s$
- $t_{5\%} \simeq 7.5s$

Tomando la aproximación del tiempo de asentamiento al 5% $t_{5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$ y teniendo en cuenta que $\omega_n = 4$, se tiene que $\zeta = 0.1$. $t_{2\%} \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n} = 10s$.

4)

a) Calcular el error en régimen para una entrada escalón de amplitud unitaria.

Tomando que $E(s) = \frac{1}{1+H(s)} \cdot U(s)$, por Teorema de valor final se tiene que el error para una entrada escalón de amplitud unitaria es:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\frac{1}{s+2}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{3}, \qquad K_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

Estamos tratando con una transferencia de tipo 0, pues no cuenta con polos en el origen.

b) Elegir el controlador para que el error al escalón sea nulo.

Para que la respuesta al escalón tenga error nulo necesito que mi sistema conjunto $C(s)H(s)$ sea de tipo 1, esto significa agregar un polo en el origen.

Tomando que $E(s) = \frac{1}{1+C(s)H(s)} \cdot U(s)$.

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+C(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)\frac{1}{s+2}} = 0$$

Colocando un controlador del tipo integral $C(s) = \frac{K}{s}$ logramos colocar un polo en el origen de nuestro sistema, obteniendo así un sistema del tipo 1.

$$\lim_{s\to 0} \frac{K}{s}\frac{1}{(s+2)} = \infty \Rightarrow e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{s}\cdot\frac{1}{s+2}} = 0$$

c) Elegir *K* de forma tal que el sobretiro sea menor al 10%.

Calculando la transferencia total del sistema se obtiene que $G(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)} =\dots= \frac{K}{s^2+2s+K}$

Para calcular ζ se tiene que $2\zeta\omega_n = 2$, siendo $\omega_n = \sqrt{K} \quad \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{K}}$

Suponiendo que se espera una respuesta oscilatoria de nuestro sistema frente a una entrada del tipo escalón $\Rightarrow K > 1$

Se tiene que $Mp = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 10 \Rightarrow e^{\frac{-\pi 1/\sqrt{K}}{\sqrt{1-1/K}}} < 0.1$

Despejando K se obtiene que $\Rightarrow K < 2.681 \qquad 1 < K < 2.681$