

Introducción al Control Industrial
Solución Práctico 2
Transformada de Laplace y Transferencias
2024

1) Calcular la Transformada de Laplace:

Por tabla de Transformada de Laplace se obtienen los siguientes resultados

$$\text{a) } L(\delta(t)) = 1$$

$$\text{d) } L(18t^2) = \frac{18 \cdot 6}{s^3} = \frac{108}{s^3}$$

$$\text{b) } L(7,8) = \frac{7,8}{s}$$

$$\text{e) } L(120 \operatorname{sen}(25t)) = \frac{120\omega}{s^2 + (25\omega)^2}$$

$$\text{c) } L(16e^{-8t}) = \frac{16}{s+8}$$

$$\text{f) } L(3,2 \cos(100t)) = \frac{3,2s}{s^2 + (100\omega)^2}$$

2) Calcular $f(t)$ siendo $F(s)$ su Transformada de Laplace:

Aplicando fracciones simples y/o tabla de Transformadas se obtienen los siguientes resultados

$$\text{a) } L^{-1}\left(\frac{s+2}{2(s^2-1)}\right) = \frac{1}{4}(-e^{-t} + 3e^t)$$

$$\text{e) } L^{-1}\left(\frac{250\omega}{((s+4)^2 + \omega^2)}\right) = 250e^{-4t} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\text{b) } L^{-1}\left(\frac{8}{s^2}\right) = 8t$$

$$\text{f) } L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^3}\right) = \frac{Y(t-4) \cdot (t-4)^2}{2}$$

$$\text{c) } L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = 1 - \cos(t)$$

$$\text{g) } L^{-1}\left(\frac{82}{s \cdot (5s+1)}\right) = 82(1 - e^{-t/5})$$

$$\text{d) } L^{-1}\left(\frac{25\omega}{(s^2 + \omega^2)}\right) = 25 \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\text{h) } L^{-1}\left(\frac{4 \cdot (s+5)(s+7)}{s(s+3)(s+6)}\right) = \frac{1}{9}(70 - 32e^{-3t} - 2e^{-6t})$$

3) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + 5(sX(s) - x(0)) + 4X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s)(s^2 + 5s + 4) = \frac{1}{s} + x'(0) + x(0)(s + 5)$$

Despejando X , se obtiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+4)} + \frac{x'(0)+x(0)(s+5)}{s^2+5s+4} = \frac{1}{s(s^2+5s+4)} + \frac{3s+16}{s^2+5s+4}$$

Dado que todas las raíces del polinomio son reales, se procede a realizar fracciones simples.

Hallando las raíces se obtiene: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$

Volviendo a la ecuación:
$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)} + \frac{3s+16}{(s+1)(s+4)}$$

Realizando método fracciones simples en cada término:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1/3}{(s+1)} + \frac{-1/12}{(s+4)} + \frac{13/3}{(s+1)} + \frac{-4/3}{(s+4)}$$

Antitransformando:
$$x(t) = 1 + 4e^{-t} - \frac{17}{12}e^{-4t}$$

b) $0.5x''(t) + 0.6x'(t) + 2.1x(t) = 5$, con $x(0) = 0, x'(0) = 0$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$0.5(s^2X(s)) + 0.6(sX(s)) + 2.1X(s) = \frac{5}{s}$$

$$X(s)(0.5s^2 + 0.6s + 2.1) = \frac{5}{s}$$

Despejando X , se obtiene que:

$$X(s) = \frac{5}{s(0.5s^2+0.6s+2.1)} = \frac{10}{s(s^2+1.2s+4.2)}$$

Dado que todas las raíces del polinomio son reales, se procede a realizar fracciones simples.

Hallando las raíces se obtiene: $\lambda_i = \frac{-1.2 \pm \sqrt{1.44 - 16.8}}{2}$

Volviendo a la ecuación:
$$X(s) = \frac{10}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}$$

Realizando método fracciones simples en cada término:

$$X(s) = 10 \left(\frac{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}}{s} + \frac{\frac{-1}{\lambda_1(-\lambda_1+\lambda_2)}}{(s+\lambda_1)} + \frac{\frac{-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}}{(s+\lambda_2)} \right)$$

Antitransformando:
$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1(-\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} e^{-\lambda_2 t}$$

c) Se tiene que: $x'(t) + ax(t) = u(t)$, con $x(0) = x_0$, $a > 0$

i) $u(t) = 0$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_0 + aX(s) = 0$$

$$X(s)(s + a) = x_0$$

Despejando X , se obtiene que:

$$X(s) = \frac{x_0}{(s+a)} \quad \text{Antitransformando} \quad \rightarrow \quad L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = x_0 e^{-at}$$

ii) $u(t) = 1$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_0 + aX(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s)(s + a) = \frac{1}{s} + x_0$$

Despejando X , se obtiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+a)} + \frac{x_0}{(s+a)} = \frac{1/a}{s} + \frac{-1/a}{s+a} + \frac{x_0}{s+a} = \frac{1/a}{s} + \frac{x_0 - 1/a}{s+a}$$

Antitransformando $\rightarrow L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{a} + \left(x_0 - \frac{1}{a}\right) e^{-at}$

iii) $u(t) = \cos(\omega_o t)$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_o + aX(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$$

$$X(s)(s + a) = \frac{s}{s^2 + \omega_o^2} + x_o$$

Despejando X , se obtiene que:

$$X(s) = \frac{x_o}{(s+a)} + \frac{s}{(s^2 + \omega_o^2)(s+a)} = \frac{x_o}{s+a} + \frac{As+B}{s^2 + \omega_o^2} + \frac{C}{s+a}$$

(Sugerencia: Al tener ecuaciones de 2do grado en el denominador se recomienda colocar polinomios generales de 1er grado, ya que el método de la ‘tapadita’ no es efectivo en estos casos)

$$A = \frac{a}{a^2 + \omega_o^2} \quad B = \frac{\omega_o^2}{a^2 + \omega_o^2} \quad C = \frac{-a}{a^2 + \omega_o^2}$$

$$X(s) = \frac{x_o \frac{a}{a^2 + \omega_o^2}}{s+a} + \frac{a}{a^2 + \omega_o^2} \cdot \frac{s + \frac{\omega_o^2}{a}}{s^2 + \omega_o^2} = \frac{x_o \frac{a}{a^2 + \omega_o^2}}{s+a} + \frac{a}{a^2 + \omega_o^2} \cdot \left[\frac{s}{s^2 + \omega_o^2} + \frac{\omega_o}{a} \frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2} \right]$$

Antitransformando

$$\rightarrow L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \left(x_o - \frac{a}{a^2 + \omega_o^2} \right) e^{-at} + \frac{a}{a^2 + \omega_o^2} \left(\cos(\omega_o t) + \frac{\omega_o}{a} \sin(\omega_o t) \right)$$

4) Se transforma la ecuación y se despeja:

$$ms^2 X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)(ms^2 + bs + k) = F(s)$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

5) Se plantean las ecuaciones que rigen el sistema:

Malla:

$$v_i(t) = L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

Ecuación resistencia:

$$v_o(t) = Ri(t)$$

Utilizando Laplace se resuelve la ecuación diferencial que surge de plantear la malla para obtener $i(t)$ y luego se obtiene $v_o(t)$ utilizando la segunda ecuación.

$$V_i(s) = Ls.I(s) + R.I(s)$$

$$\Rightarrow I(s) = V_i(s) \frac{1}{Ls + R}$$

Como $v_i(t)$ es un escalón de amplitud E, $V_i(s) = \frac{E}{s}$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} = \frac{E}{L} \frac{1}{s(s + R/L)}$$

Por fracciones simples:

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{L}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

Antitransformando:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}T} \right)$$

Finalmente:

$$v_o(t) = Ri(t) = E \left(1 - e^{-\frac{R}{L}T} \right)$$

6)

a)

1) $v_i = Ri + L \frac{di}{dt} + k_\epsilon \omega \rightarrow$ Malla del circuito

2) $J \frac{d\omega}{dt} = k_\tau i - b\omega \rightarrow$ Segunda ecuación en el eje de los motores

3) $v_o = K\omega \rightarrow$ Generador proporcional a la velocidad angular

b) Transformamos las ecuaciones y despejamos $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

$$1) V_i(s) = RI(s) + LsI(s) + k_\varepsilon \omega(s)$$

$$2) Js\omega(s) = k_\tau I(s) - b\omega(s)$$

$$3) V_o(s) = K\omega(s)$$

$$\Rightarrow I(s) = \omega(s) \left(\frac{Js - b}{k_\tau} \right)$$

$$\Rightarrow V_i(s) = (R + Ls)\omega(s) \left(\frac{Js - b}{k_\tau} \right) + k_\varepsilon \omega(s)$$

$$\Rightarrow \omega(s) \frac{1}{k_\tau} ((R + Ls)(Js - b) + k_\varepsilon \cdot k_\tau) = V_i(s)$$

$$\Rightarrow \omega(s) = V_i(s) \frac{k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon \cdot k_\tau}$$

$$\Rightarrow V_o(s) = V_i(s) \frac{K \cdot k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon \cdot k_\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K \cdot k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon \cdot k_\tau}$$