

Introducción al Control Industrial

Solución Práctico 1

Modelado de sistemas y linealización

2024

1) Modelado: Escriba las ecuaciones diferenciales que modelan los siguientes sistemas e indique cuáles podrían ser las variables de estado en un eventual modelo de variables de estado:

a)

Dado el circuito se deducen las siguientes ecuaciones:

Por ley de nodos:
$$\frac{v_i - v_o}{R_1} = i_L + C \cdot v_o' + \frac{v_o}{R_2} \quad (1)$$

Ecuación de una inductancia es:
$$v_o = L \cdot i_L' \quad (2)$$

Derivando (1) y sustituyendo (2):
$$\frac{v_i' - v_o'}{R_1} = \frac{v_o}{L} + C \cdot v_o'' + \frac{v_o}{R_2} \quad (3)$$

Para el modelo de variables de estado se toma:

$$x(t) = (v_o \ v_o') \quad x'(t) = (v_o' \ v_o'') \quad u(t) = (v_i \ v_i')$$

b)

Dada la sección del tanque 'S', el caudal de entrada 'u' y el caudal de salida 'y' se deduce la variación de volumen en el tanque como:

$$V' = (Sh)' = S \cdot h' \quad (1)$$

$$S \cdot h' = u - y = u - k\sqrt{h}$$

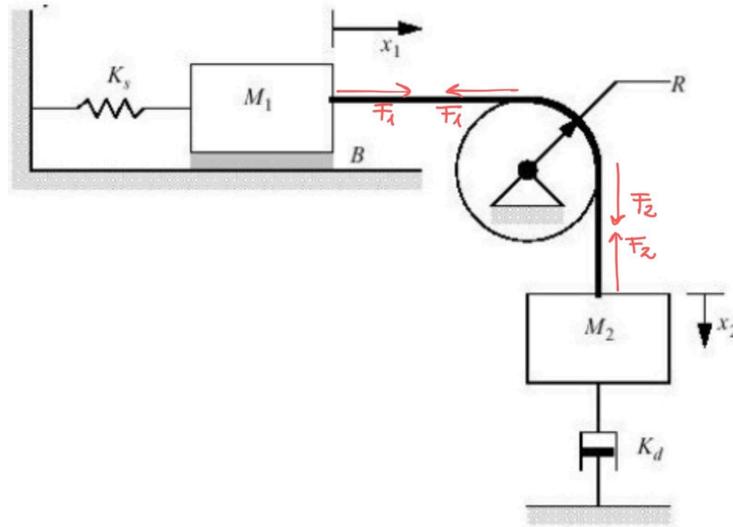
Lo que da:
$$S \cdot h' = u - k\sqrt{h} \quad (2)$$

$$h' = \frac{1}{S}u - \frac{k}{S}\sqrt{h} \quad (3)$$

Para el modelo de variables de estado se toma:

$$x(t) = (h) \quad x'(t) = (h') \quad u(t) = (u)$$

c)



Fuerza de elastica:

$$F_s = K_s \cdot x_1$$

Fuerza de rozamiento:

$$f_B = B \cdot N_1 = B \cdot M_1 g$$

Fuerza del amortiguador:

$$F_d = K_d \cdot x_2'$$

Peso masa 2:

$$P_2 = M_2 g$$

Vínculo de vel. en la polea:

$$x_1' = x_2' = R\theta'$$

2da cardinal en polea:

$$RF_2 - RF_1 = -J\theta'' \quad (1)$$

1er cardinal en M1:

$$F_1 - K_s x_1 + BM_1 g = M_1 x_1'' \quad (2)$$

1er cardinal en M2:

$$M_2 g - K_d x_2' - F_2 = M_2 x_2'' \quad (3)$$

Derivando el vínculo:

$$x_1'' = x_2'' = R\theta'' \quad (4)$$

(4) en (1):

$$(F_2 - F_1)R^2 = -Jx_1'' \quad (5)$$

(4) en (2)+(3):

$$F_1 - K_s x_1 + BM_1 g + M_2 g - K_d x_2' - F_2 = x_1''(M_1 + M_2) \quad (6)$$

(5) en (6):

$$g(M_2 + BM_1) - K_s x_1 - K_d x_1' = x_1''(M_1 + M_2 + J/R^2)$$

Para el modelo de variables de estado se toma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1' \end{pmatrix} \quad x'(t) = \begin{pmatrix} x_1' & x_1'' \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix}^*$$

(*) **NOTA:** El vector de entradas para este ejercicio no es tan claro y evidente.

2)

a)

Ecuaciones de motor ideal:

$$T = k_{\tau} \cdot i_r(t)$$

$$\varepsilon = k_{\varepsilon} \cdot \omega(t)$$

Por Kirchhoff:

$$E - Ri_r - Li_r' - k_{\varepsilon} \cdot \omega(t) = 0 \quad (1)$$

Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J \cdot \theta'' = k_{\tau} \cdot i_r(t) - b\theta' - Cm(t) \quad (2)$$

b)

Para el modelo de variables se toma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_r \\ \theta' \end{pmatrix} \quad x'(t) = \begin{pmatrix} i_r' \\ \theta'' \end{pmatrix} \quad u(t) = (E \quad Cm(t))$$

Dado (2)

$$\theta'' = \frac{k_{\tau}}{J} i_r - \frac{b}{J} \theta' - \frac{Cm(t)}{J}$$

Dado (1)

$$i_r' = -\frac{R}{L} i_r - \frac{k_{\varepsilon}}{L} \theta' + \frac{E}{L}$$

Donde se deducen las matrices: $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

3)

a)

Ecuaciones de motores ideales:

$$T_a = k_a \cdot i_a(t)$$

$$\varepsilon_a = k_a \cdot \omega(t)$$

$$T_b = k_b \cdot i_b(t)$$

$$\varepsilon_b = k_b \cdot \omega(t)$$

Dado que los ejes están unidos, la velocidad angular $\omega(t)$ es la misma para ambos motores M1 y M2.

Planteando Kirchhoff en las mallas de los motores:

$$V_a = R_a i_a + L_a i_a' + k_a \omega \quad (1)$$

$$V_b = R_b i_b + L_b i_b' + k_b \omega \quad (2)$$

Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J \cdot \theta'' = k_a \cdot i_a + k_b \cdot i_b - b\theta' - C(t) \quad (3)$$

b)

Para el modelo de variables se toma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ \theta' \end{pmatrix} \quad x'(t) = \begin{pmatrix} i_a' \\ i_b' \\ \theta'' \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ C(t) \end{pmatrix}$$

Dado (1)

$$i_a' = -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{k_a}{L_a}\theta' + \frac{V_a}{L}$$

Dado (2)

$$i_b' = -\frac{R_b}{L_b}i_b - \frac{k_b}{L_b}\theta' + \frac{V_b}{L_b}$$

Dado (3)

$$\theta'' = \frac{k_a}{J}i_a + \frac{k_b}{J}i_b - \frac{b}{J}\theta' - \frac{C(t)}{J}$$

Donde se deducen las matrices: $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

4)

a)

Para calcular los puntos de operación se anulan las derivadas y se sustituyen las variables por su punto de operación. En este caso:

$$h' = \frac{1}{s}u - \frac{k}{s}\sqrt{h} \rightarrow 0 = \frac{1}{s}u_0 - \frac{k}{s}\sqrt{h_0} \quad , y_0 = k\sqrt{h_0}$$

Despejando:

$$h_0 = \left(\frac{u_0}{k}\right)^2, y_0 = u_0$$

Este resultado se interpreta como que en el punto de equilibrio el caudal que sale es el mismo que el que entra, lo cual tiene sentido en un punto de equilibrio, donde se mantiene el nivel del agua.

b)

Para la linealización, identificamos primero las funciones f y g que representan el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)] \end{aligned}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} x &= [h], y = [y], u = [u] \\ \Rightarrow f[x(t), u(t)] &= \frac{1}{s}u - \frac{k}{s}\sqrt{h} \quad , g[x(t), u(t)] = k\sqrt{h} \end{aligned}$$

Para la linealización se define:

$$\begin{aligned}\hat{h} &= h - h_0 = h - \left(\frac{u_0}{k}\right)^2 \\ \hat{u} &= u - u_0\end{aligned}\quad (1)$$

Linealizando:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{dh}(u_0) &= \frac{-k^2}{2su_0} & \frac{\delta f}{du}(u_0) &= \frac{1}{s} \\ \frac{\delta g}{dh}(u_0) &= \frac{k^2}{2u_0}\end{aligned}$$

Se obtiene el modelo linealizado para pequeñas aportaciones respecto de u_0 :

$$\begin{aligned}\hat{h}' &= \frac{-k^2}{2su_0} \cdot \hat{h} + \frac{1}{s} \cdot \hat{u} \\ \hat{y} &= \frac{k^2}{2u_0} \cdot \hat{h}\end{aligned}$$

c)

El punto de operación al que trabaja el sistema es:

$$h = h_0 \quad (1)$$

Derivando (3) se tiene que:

$$h' = 0$$

Dado que u se mantiene constante:

$$u' = 0 \quad (4)$$

Por (1) y (4) se tiene que el punto de operación al que trabaja $u_0 = k\sqrt{h_0}$

De donde se obtiene a su vez el punto de operación de la salida $y_0 = k\sqrt{h_0}$

Para la linealización se define:

$$\begin{aligned}\hat{h} &= h - h_0 \\ \hat{u} &= u - k\sqrt{h_0}\end{aligned}$$

Tomando:

$$\begin{aligned}f[x(t), u(t)] &= \frac{1}{s}u - \frac{k}{s}\sqrt{h} \\ g[x(t), u(t)] &= k\sqrt{h}\end{aligned}$$

Linealizando:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{dh}(h_0) &= \frac{-k}{2s\sqrt{h_0}} & \frac{\delta f}{du}(h_0) &= \frac{1}{s} \\ \frac{\delta g}{dh}(h_0) &= \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\end{aligned}$$

Se obtiene el modelo linealizado para pequeñas aportaciones respecto de u_0 :

$$\hat{h}' = \frac{-k}{2s\sqrt{h_0}} \cdot \hat{h} + \frac{1}{s} \cdot \hat{u}$$
$$\hat{y} = \frac{k}{2\sqrt{h_0}} \cdot \hat{h}$$