Ej 3 P7

Lunes 17/6/24 - Introducción al Control Industrial

Se tiene una planta cuya función de transferencia es: $P(s) = \frac{5}{(s+1)(s+10)}$.

Se desea modificar su desempeño por medio de un controlador PID que se coloca en serie con la planta, de manera que el sistema realimentado tenga las siguientes características:

- Se comporta como un sistema de 2° Orden sin ceros, críticamente amortiguado.
- Tenga ganancia en régimen unitaria en continua
- Sea más **lento** que la planta original.

Se pide:

1. Indique qué modos de control deben activarse para cumplir las especificaciones anteriores y el valor de las constantes del controlador. Indique explícitamente la función de transferencia en lazo abierto y en lazo cerrado.
2. Desarrolle la expresión temporal de la respuesta al escalón unitario.

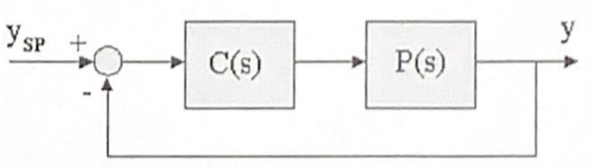
Parte 1: diseñar el PID

Requerimientos:

- Sistema de 2° orden sin ceros crit amortiguado -> seda = 1
- Ganancia en régimen unitaria en continua -> Error nulo al escalón -> Lazo abierto con polo en el origen
- Sea más lento que la planta original -> El polo más lento tiene que ser más lento que el polo más lento original.

Las condiciones se pueden verificar con una ganancia en lazo abierto con la siguiente forma:

$$C(s)P(s) = \frac{A}{s(s+B)}$$



$$G_{CL} = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{A}{s^2+Bs+A}$$

Tomemos un controlador genérico:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d.s = \frac{K_d.s^2 + K_p.s + K_i}{s}$$

$$C(s)P(s) = \frac{K_d.s^2 + K_p.s + K_i}{s} \times \frac{5}{(s+1)(s+10)}$$

El numerador del controlador tiene que ser tal que anule uno (solo uno) de los polos de la planta. Como precisamos que el sistema quede más lento, anulamos el polo en 10, que es el más rápido.

Por lo tanto:

$$K_d.s^2 + K_p.s + K_i = K(s+10)$$

Esto lo logramos eligiendo los parámetros de la siguiente manera:

$$K_d = 0, K_i = 10K_p$$

Introduciendo esos valores en la ganancia en lazo abierto:

$$C(s)P(s) = \frac{K_p.s + 10K_p}{s} \times \frac{5}{(s+1)(s+10)} = \frac{5K_p}{s(s+1)}$$

Ya tenemos:

- Ganancia unitaria en continua
- Transferencia de segundo orden sin ceros.

Nos falta:

- Sistema críticamente amortiguado
- Verificar que sea más lento

Ahora veamos la ganancia en lazo cerrado para despejar e imponer condiciones en seda.

$$G_{CL} = \frac{A}{s^2 + Bs + A} = \frac{5K_p}{s^2 + s + 5K_p} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 5K_p, 2\zeta\omega_n = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{5K_p}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{5K_p}}$$

Como queremos un sistema subamortiguado, imponemos seda = 1 y despejamos K_p

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{5K_p}} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{4 \times 5K_p} = 1 \qquad \Rightarrow K_p = \frac{1}{20}$$

Finalmente, llegamos a los valores finales de los parámetros.

$$K_d = 0, K_i = \frac{1}{2}, K_p = \frac{1}{20}$$

Ya fijamos todos los parámetros. El sistema, ¿es más lento?

Veamos la posición de sus polos.

$$G_{CL} = \frac{0.25}{s^2 + s + 0.25} = \frac{0.25}{(s + 0.5)^2}$$

Originalmente, el polo más lento estaba en 1.
Ahora ambos polos están en 0.5, lo cual es más lento.

Parte 2: Respuesta al escalón.

Para calcular la respuesta al escalón hallamos la antitransformada de:

$$y(t) = L^{-1}\left(G_{CL} \times \frac{1}{s}\right)$$

Para calcular dicha antitransformada, hacemos fracciones simples y antitransformamos cada término utilizando la tabla.

$$G_{CL} \times \frac{1}{s} = \frac{0.25}{s(s+0.5)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.5} - \frac{0.5}{(s+0.5)^2}$$

El resultado final es:

$$y(t) = 1 - e^{-0.5t} - 0.5t \times e^{-0.5t}$$