Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Tarea 1

fecha de entrega: 9 de Abril de 2024

1. Sea (M,d) un espacio métrico con τ_d la topología métrica inducida por d. Para $X, Y \subseteq M$, demuestre que:
   (a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ y $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dar un ejemplo donde no se cumpla la otra inclusión. (1 punto)
   (b) $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$ y $X^\circ \cup Y^\circ \subseteq (X \cup Y)^\circ$. Dar un ejemplo donde no se cumpla la otra inclusión. (1 punto)

2. Sea $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de funciones $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que son de clase C^1, es decir, que poseen derivada continua.
   (a) Sea $\|-\|\colon \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función dada por

   $$\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)| + |f'(x)|\} \quad \text{para toda} \quad f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}).$$

   Demuestre que $\|-\|$ es una norma. (1 punto)

   (b) Sea $D \subseteq \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ el subconjunto formado por los difeomorfismos de clase C^1, es decir, D está formado por las funciones $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ tales que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Demuestre que f es una bijección monótona de $[0,1]$ sobre un intervalo $[a,b]$ para cada $f \in D$, y que $f^{-1} \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. (1 punto)

   (c) Demuestre que D es un abierto en el espacio $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \tau_{d_{\|-\|}})$. (1 punto)