Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Práctico 5

isometrías

1. Sea $(V, \|-\|)$ un espacio vectorial normado. Demuestre que dos bolas abiertas con el mismo radio son isométricas (es decir, que existe una isometría entre una bola y otra). Si reemplazamos $(V, \|-\|)$ por un espacio métrico (M, d) arbitrario, muestre que lo anterior es falso.

2. Un espacio métrico (M, d) se dice **métricamente homogéneo** cuando para todo $x, y \in M$ existe una isometría $f : M \to M$ tal que $f(x) = y$.

   (a) Demuestre que la esfera unitaria
   $$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1\}$$
   es métricamente homogénea.
   Sugerencia: Para $x, y \in S^n$ distintos, completar x a una base ortonormal. Hacer lo mismo para y, y pensar en cómo se puede construir f a partir de estas dos bases.

   (b) Sea
   $$B(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 1\}$$
   la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que toda isometría $f : B(\vec{0}, 1) \to B(\vec{0}, 1)$ satisface $f(\vec{0}) = \vec{0}$, y concluya que $B(\vec{0}, 1)$ no es métricamente homogénea.

   (En ambos casos, los productos internos considerados son los usuales).

3. Sea $(V, \langle -, - \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Demuestre que toda isometría $f : \mathbb{R} \to V$ es de la forma
   $$f(t) = a + t \cdot v$$
   donde $a, v \in V$ y $\|v\| = 1$ (se entiende que $\|-\|$ es la norma inducida por el producto interno $\langle -, - \rangle$).
   Sugerencia: Tenga en cuenta el ejercicio 6-(c) del Práctico 1.