Práctico 4

relaciones entre continuidad y conceptos de topología

1. Sea $\mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$ el conjunto de funciones continuas $f\colon [a,b] \to [a,b]$, equipado con la métrica cuadrada o del supremo $d_\infty\colon \mathcal{C}^0([a,b],[a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b],[a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por
$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$
   (a) Sea U el subconjunto de $\mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$ formado por aquellas funciones que no son sobreyectivas. Demuestre que U es abierto en (M,d).
   (b) Sea X el subconjunto de $\mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$ formado por las funciones $h\colon [a,b] \to [a,b]$ que son biyectivas continuas y con inversa continua (homeomorfismos). Demuestre que X tiene interior vacío en $\mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$.

2. Sea (M,d) un espacio métrico, y considere a $\mathbb{R}$ con la métrica usual.
   (a) Demuestre que una función $f\colon M \to \mathbb{R}$ es continua si, y solamente si, para todo $a \in \mathbb{R}$ los conjuntos
   $$X_a = \{x \in M \;/\; f(x) < a\} \qquad \text{y} \qquad Y_a = \{x \in M \;/\; f(x) > a\}$$
   son abiertos en M.
   (b) Sea $\xi\colon M \to \mathbb{R}$ la función indicatriz de un subconjunto $X \subseteq M$, es decir,
   $$\xi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$
   Demuestre que ∂X, la frontera de X en M, coincide con el conjunto de puntos de discontinuidad de la función ξ_X.
   (c) Dada $f\colon M \to \mathbb{R}$ continua, considere el conjunto abierto
   $$U = \{x \in M \;/\; f(x) > 0\}.$$
   Demuestre que, para todo $x \in \partial U$ se tiene que $f(x) = 0$. Dé un ejemplo de una función continua $f\colon M \to \mathbb{R}$ para la cual se tenga que $f(x) = 0$ con $x \notin \partial U$.

3. Sea $r \in \{1,\dots,n\}$ y $U \subseteq (\mathbb{R}^n)^r$ el conjunto formado por todas las r-listas $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r)$ de vectores linealmente independientes $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que U es un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}^n)^r$, donde $\mathbb{R}^n$ está equipado con la métrica euclídea, y $(\mathbb{R}^n)^r$ con la métrica $\rho_\infty\colon (\mathbb{R}^n)^r \times (\mathbb{R}^n)^r \to \mathbb{R}$ dada por
$$\rho_\infty((\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r),(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_r)) = \text{máx}\{\|\vec{x}_1-\vec{y}_1\|_2,\dots,\|\vec{x}_r-\vec{y}_r\|_2\}.$$
   <u>Sugerencia</u>: Trabajar primero el caso $r = n$. ¿Será que existe una función continua $\varphi\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ que caracteriza cuándo la n-lista $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ está formada por vectores linealmente independientes a partir de valor de $\varphi(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$? Para el caso $r < n$, puede ser útil tener en cuenta que la proyección $\pi_r\colon (\mathbb{R}^n)^n \to (\mathbb{R}^n)^r$ sobre las primeras r componentes es una aplicación abierta.

4. Sean F y G subconjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos en un espacio métrico (M,d). Si se considera el intervalo $[0,1]$ con la métrica usual heredada de $\mathbb{R}$, demuestre que existe una función $f\colon M \to [0,1]$ continua tal que $f^{-1}(0) = F$ y $f^{-1}(1) = G$. Concluya que existen abiertos dinjuntos $U,V \subseteq M$ tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.
   <u>Sugerencia</u>: Demostrar primero que $x \mapsto d(x,F)$ define una función continua de M en $\mathbb{R}$. Notar que $x \mapsto d(x,F)+d(x,G)$ es una función continua y no nula. Para construir la función que se pide, pueden ser de utilidad las funciones $x \mapsto d(x,F)$ y $x \mapsto d(x,F)+d(x,G)$.