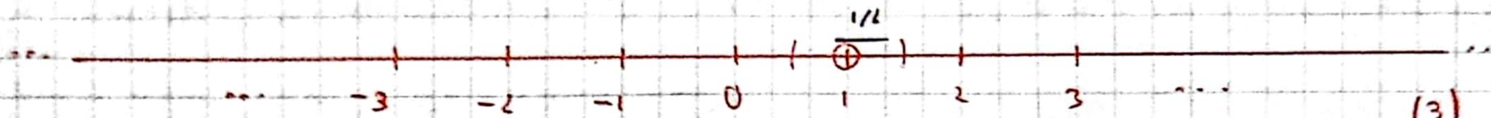
Observaciones:

(1) Como $d(x,X)=0\ \forall x\in X$, se tiene que $X\subseteq\overline{X}$

(2) Los puntos de un conjunto X no necesariamente son puntos de acumulación del mismo, es decir, en general no es cierto que $X\subseteq X'$. Por ejemplo, si $M=\mathbb{R}$ con la métrica usual y $X=\mathbb{Z}$, entonces $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}'=\emptyset$.



$(B(1,1/2)-\{1\})\cap\mathbb{Z}=\emptyset$

$1\notin\mathbb{Z}'$.

(3) Si X es finito, entonces $X'=\emptyset$.

A continuación, caracterizamos el concepto de punto de adherencia.

Proposición: Para todo espacio métrico (M,d) y $X\subseteq M$, las siguientes condiciones son equivalentes $\forall y\in M$:

(a) $y\in X'$ $\overline{X}$

(b) $\forall r>0$, $B(y,r)\cap X\neq\emptyset$.

(c) $\forall U\in\mathcal{T}_d$ con $y\in U$, se tiene que $U\cap X\neq\emptyset$.

· **Demostración:**

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $y\in X'$ es decir, $d(y,X)=0$.

Luego, $\inf\{d(y,x)/x\in X\}=0$. Supongamos que existe $r>0$ tal que $B(y,r)\cap X=\emptyset$

Entonces, $d(y,x)\geq r\ \forall x\in X$, de donde $\inf\{d(y,x)/x\in X\}\geq r$, es decir,

lo cual es una contradicción.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_d$ con $y \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $r>0$ tal que $B(y,r) \subseteq \mathcal{U}$. Por (b), $B(y,r) \cap X \neq \emptyset$. Entonces, $\mathcal{U} \cap X \neq \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (a): $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_d$ con $y \in \mathcal{U}$, se tiene $\mathcal{U} \cap X \neq \emptyset$.

En particular, $B(y,r) \cap X \neq \emptyset \quad \forall r>0$.

$\forall r>0,\ \exists x \in X \,/\, d(y,x) < r$

Luego, $\underbrace{\inf\{d(y,x) / x \in X\}}_{d(y,X)} < r, \ \forall r>0$, de donde $d(y,X)=0$ ■

Observaciones:

Vemos de la proposición y definición anteriores que:

(1) $\partial X \subseteq \overline{X} \quad \forall X \subseteq M$.

(2) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{M} = M$, $X \subseteq \overline{X}$

(3) $Y \subseteq X \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{X}$

Respecto al derivado de un conjunto y su relación con la clausura, tenemos el siguiente resultado:

Proposición: Sea (M,d) un espacio métrico y $X \subseteq M$. Entonces:

(1) $y \in X'$ sii $y \in \overline{X - \{y\}}$.

(2) $\overline{X} = X \cup X'$

No hacer

• Demostración:

(1) Supongamos $y \in X'$. Entonces, $(B(y,r) - \{y\}) \cap X \neq \emptyset \ \forall r>0$

Al reescribir $(B(y,r) - \{y\}) \cap X = B(y,r) \cap \{y\}^c \cap X = B(y,r) \cap X \cap \{y\}^c$
$= B(y,r) \cap (X - \{y\}),$

tenemos que

$$B(y,r) \cap (X - \{y\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0,$$

es decir, $y \in \overline{X - \{y\}}$, por la proposición anterior.

El recíproco se prueba de forma análoga.

(2) Por un lado, $X \subseteq \overline{X}$. Por (1), $y \in X' \Rightarrow y \in \overline{X - \{y\}} \subseteq \overline{X}$, de donde $X' \subseteq \overline{X}$.

Entonces, $X \cup X' \subseteq \overline{X}$.

Ahora, sea $y \in \overline{X}$ tal que $y \notin X$. Veamos que $y \in X'$.

$$y \in \overline{X} \underset{\text{Prop. anterior}}{\Longrightarrow} B(y,r) \cap X \neq \emptyset,\ \forall r > 0 \underset{y \notin X}{\Longrightarrow} (B(y,r) - \{y\}) \cap X \neq \emptyset \Longrightarrow y \in X'. \quad \blacksquare$$

Más propiedades:

Proposición: Sea (M,d) un espacio métrico y $X \subseteq M$.

(1) Si $X \neq \emptyset$ e $y \in M$, entonces $d(y, X) = d(y, \overline{X})$

(2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

(3) X es cerrado si y solamente si $X = \overline{X}$

(4) $\overline{X}, \partial X$ y X' son subconjuntos cerrados de M (m. harén)

<u>Demostración</u>:

(1) $X \subseteq \overline{X} \Rightarrow \inf\{d(y,z) / z \in \overline{X}\} \leq \inf\{d(y,x) / x \in X\}$.

es decir, $d(y,\overline{X}) \leq d(y,X)$.

Sea $z \in \overline{X}$. Sabemos que $|d(y,X) - d(z,X)| \leq d(y,z)$.

Por otro lado, $\overline{X} = X \cup X'$. Si $z \in X$, entonces $d(z,X) = 0$. Supongamos ahora que $z \in X'$. Luego, $\forall r > 0$, $(B(z,r) - \{z\}) \cap X \neq \emptyset$, es decir,

$$\forall r > 0, \exists x \in X - \{z\} \text{ tal que } d(z,x) < r$$

Lo anterior implica que $d(z,X) = 0$. Así

$$d(y,X) \leq |d(y,X) - \underbrace{d(z,X)}_{=0}| \leq d(y,z)$$

$$d(y,X) \leq d(y,z), \ \forall z \in \overline{X}.$$

Por lo tanto, $d(y,X) \leq d(y,\overline{X})$.

(2) Es claro que $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$. Sea $y \in \overline{\overline{X}}$. Luego, $d(y,\overline{X}) = 0$.

Por la parte anterior, $d(y,X) = d(y,\overline{X})$. Así, $d(y,X) = 0$, es decir, $y \in \overline{X}$. $\therefore \overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$.

(3) Supongamos que X es cerrado (es decir, $M-X$ es abierto). Sea $y \in \overline{X}$. Luego, $\forall r > 0$, $B(y,r) \cap X \neq \emptyset$. Por otro lado, como (con $y \notin X$) $M-X$ es abierto e $y \in M-X$, existe $\rho > 0$ tal que $B(y,\rho) \subseteq M-X$

Luego, $B(y,\rho)\cap(X-\{y\})=\emptyset$, lo cual es una contradicción.

$\therefore \underbrace{X\cup X'}_{=\overline{X}}=X$.

Ahora supongamos que $\overline{X}=X$. Veamos que $M-X$ es abierto.
Sea $y\in M-X$. Luego, como $X=\overline{X}=X\cup X'$, se tiene que y no es un punto de adherencia de X, es decir, existe $r>0$ tal que

$$B(y,r)\cap X = B(y,r)\cap(X-\{y\})=\emptyset$$

Lo anterior implica que $B(y,r)\subseteq M-X$, $\forall y\in M-X$

$\therefore M-X$ es abierto

(4) $\overline{X}=\overline{\overline{X}}$ por (2). Ahora, (3) $\Rightarrow \overline{X}$ es cerrado.

Por una proposición anterior, $M=\mathring{X}\cup\partial X\cup(M\mathring{-}X)$ (unión disjunta).

Así, $\partial X = M-[\mathring{X}\cup(M\mathring{-}X)]$, donde $\mathring{X}\cup(M\mathring{-}X)$ es abierto por ser unión de abiertos. $\therefore \partial X$ es cerrado.

Finalmente, sea $y\in M-X'$. Luego, existe $r>0$ tal que $B(y,r)\cap(X-\{y\})=\emptyset$. Es decir, $(B(y,r)-\{y\})\subseteq M-X$. Entonces, $\forall z\in B(y,r)-\{y\}$ existe $\rho>0$ tal que $B(z,\rho)\subseteq B(y,r)-\{y\}\subseteq M-X$, por lo cual $z\notin X'$. Tenemos por lo tanto que $B(y,r)\subseteq M-X'$, $\forall y\in M-X'$, es decir, $M-X'$ es abierto ∎

__Ejemplos__:

(1) $M = \mathbb{R}$ con la métrica usual.

$X = [a, b)$, $a < b$.

$\overline{X} = [a, b]$, $X' = [a, b]$.

Los conjuntos $\overline{X}$ y X' dependen de la métrica escogida. En efecto, si cambiamos la métrica usual por la discreta, tenemos que $\overline{X} = [a, b)$ y $X' =$

(2) Sea (M, d) un espacio métrico, $x \in M$ y $r > 0$.

$\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ no es cierto en general. En efecto, si $Card(M) > 1$ y d es la métrica discreta, tenemos $B(x, 1) = \{1\}$ $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$ y $\overline{B}(x, 1) = M$.

Si por ejemplo $M = (M, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial real normado, y $d = d_{\|\cdot\|}$, entonces $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$. Si $y \notin \overline{B}(x, r)$, sea $\rho = d(y, x) - r > 0$. Luego, $B(y, \rho) \cap B(x, r) = \emptyset$. De lo contrario, si $z \in B(y, \rho) \cap B(x, r)$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} d(z, y) < \rho = d(y, x) - r \\ d(z, x) < r \end{array}\right\} \Longrightarrow d(x, y) \underset{\uparrow}{\leq} d(z, y) + d(z, x) < d(y, x) \quad \text{(contradicción)}$$

(desigualdad triangular).

Por lo tanto, y no es un punto de adherencia de $B(x, r)$, y así $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$

(Note que para esta inclusión no usamos la hipótesis).

Ahora, sea $y \in \overline{B}(x,r)$, es decir, $d(y,x) \leq r$. Si $d(y,x) < r$, entonces $y \in B(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$. Podemos suponer entonces que $d(y,x) = r$. Consideremos la sucesión $y_n = \frac{1}{n}(x-y) + y$. Luego, $d(y_n, x) = \left\| \frac{1}{n}(x-y) + y - x \right\|$

$$= \left\| \left(\frac{1}{n} - 1\right)(x-y) \right\| = \frac{(n-1)}{n} \|x-y\| < r$$

Así, $y_n \in B(x,r)$. Por otro lado, $d(y, y_n) = \left\| y - \frac{1}{n}(x-y) - y \right\| = \frac{1}{n}\|x-y\| = \frac{r}{n}$.

$$\{d(y,y_n) \,/\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subseteq \{d(y,z) \,/\, z \in B(x,r)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\inf\{d(y,z) \,/\, z \in B(x,r)\} \leq \inf\{d(y,y_n) \,/\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = \inf\left\{\frac{r}{n} \,/\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\} = 0$$

$\therefore$ $d(y, B(x,r)) = 0$, por lo cual $y \in \overline{B(x,r)}$.

(3) $M = \mathbb{R}$ con la métrica usual.

$X = \mathbb{Q}$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$)

(4) $M = \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f$ es continua$\}$.

Equipamos a M con d_∞.

X es cerrado en M. En efecto, veamos que $M - X$ es abierto.

Sea $D_x([a,b],\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}) \,/\, f$ es discontinua en $x\}$

$x \in [a,b]$

$M - X = \bigcup_{x \in [a,b]} D_x([a,b], \mathbb{R})$, por lo cual basta probar que cada $D_x([a,b], \mathbb{R})$ es abierto.

Sea $f \in D_x([a,b], \mathbb{R})$. Veamos que existe $r > 0$ tal que $B_{d_\infty}(f, r) \subseteq D_x([a,b], \mathbb{R})$.
f discontinua en $x \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, existe x_δ con

$$|x_\delta - x| < \delta \text{ y } |f(x_\delta) - f(x)| \geq 3\cdot\varepsilon$$

Sea $r = \varepsilon$ y $g \in B_{d_\infty}(f, r)$. Veamos que g es discontinua en x.

Para x_δ, se tiene:

$$\begin{aligned}
3\cdot\varepsilon \leq |f(x_\delta) - f(x)| &\leq |f(x_\delta) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\
&\leq |f(x_\delta) - g(x_\delta)| + |g(x_\delta) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\
&\leq \varepsilon + |g(x_\delta) - g(x)| + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\varepsilon \leq |g(x_\delta) - g(x)|.$$

$\therefore$ g es discontinua en x_δ.

Métricas equivalentes

En esta sección estudiaremos condiciones bajo las cuales dos métricas sobre un conjunto inducen la misma topología. Definamos primero cuándo y cómo comparan dos métricas sobre un mismo conjunto.

Definición: Sean d_1 y d_2 dos métricas sobre un mismo conjunto M. Diremos que d_1 es más fina que d_2 si $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$. En el caso en el cual $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$, diremos que d_1 y d_2 son equivalentes.

Proposición: Las siguientes condiciones son equivalentes: (No hacer)

(a) d_1 es más fina que d_2.

(b) $\forall x \in M$ y $r>0$, existe $\rho>0$ tal que $B_{d_1}(x,\rho) \subseteq B_{d_2}(x,r)$.

· Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$. Entonces, $B_{d_2}(x,r)$ es abierto en $\mathcal{T}_{d_1}$. Así, para $x \in B_{d_2}(x,r)$ existe $\rho>0$ tal que $B_{d_1}(x,\rho) \subseteq B_{d_2}(x,r)$

(b) $\Rightarrow$ (a): Como todo abierto en $\mathcal{T}_{d_2}$ es unión de bolas abiertas, basta con probar que $B_{d_2}(x,r) \in \mathcal{T}_{d_1}$, $\forall x \in M$ y $\forall r>0$. Sea entonces $y \in B_{d_2}(x,r)$. Luego, existe $\varepsilon>0$ tal que $B_{d_2}(y,\varepsilon) \subseteq B_{d_2}(x,r)$. Por (a), existe $\rho>0$ tal que $B_{d_1}(y,\rho) \subseteq B_{d_2}(y,\varepsilon) \subseteq B_{d_2}(x,r)$. $\therefore B_{d_2}(x,r) \in \mathcal{T}_{d_1}$. ■

5

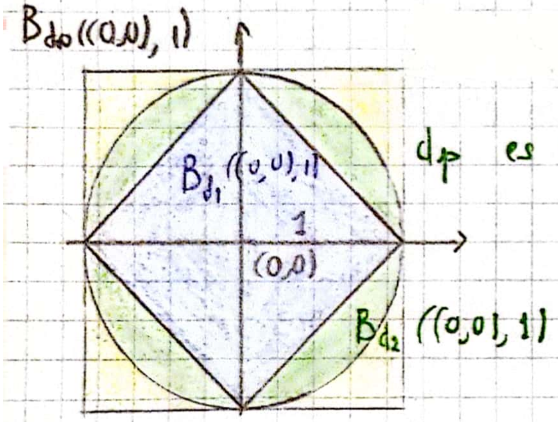
Ejemplos:

(1) Em $\mathbb{R}^n$, para $1 \leq p < \infty$, recuerde que

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_1(\vec{x}, \vec{y}) \leq n\, d_\infty(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

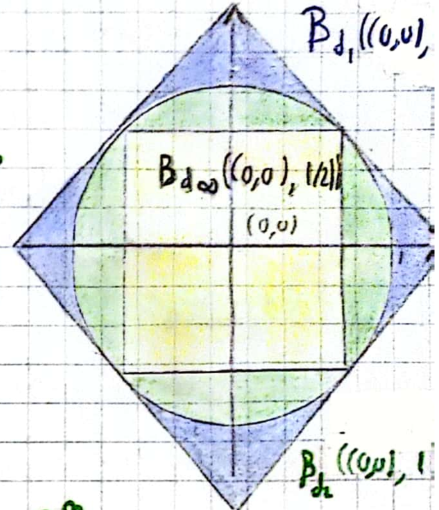
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$B_{d_\infty}(\vec{x}, r) \supseteq B_{d_p}(\vec{x}, r) \qquad B_{d_p}(\vec{x}, r) \supseteq B_{d_\infty}(\vec{x}, r/n)$$



d_p es más fina que d_∞ — d_∞ es más fina que d_p

d_p y d_∞ som métricas equivalemtes



$\therefore$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$, d_p y d_∞ inducem la misma topología sobre $\mathbb{R}^n$.

(2) Em $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, para $1 \leq p < \infty$, recuerde que

$$d_p(f, g) \leq d_1(f, g) \leq (b-a)\, d_\infty(f, g),$$

de domde d_∞ es más fina que d_p. (es decir, $\mathcal{T}_{d_p} \subseteq \mathcal{T}_{d_\infty}$).
Sim embargo, d_p no es más fina que d_∞. (ver práctico).

(3) Complemento al ejemplo (1):

La topología $\mathcal{T}_{d_\infty}$ inducida por d_∞ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathcal{T}$ la topología producto. Recuerde que $\mathcal{T}$ es la topología generada por la siguiente base

$$\beta = \{ U_1 \times \cdots \times U_n \ / \ U_i \in \mathcal{T}_{d_1}^{\mathbb{R}} \ \forall i = 1, \ldots, n \}$$

↳ topología usual de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{T}_{d_\infty} \subseteq \mathcal{T}$: Basta probar que $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) \in \mathcal{T} \ \forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

$$B_{d_\infty}(\vec{x}, r) = \{ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \max\{ |y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n| \} < r \}.$$

$$\vec{y} \in B_{d_\infty}(\vec{x}, r) \iff \underset{\forall i = 1, \ldots, n}{|y_i - x_i| < r} \iff \underset{\forall i = 1, \ldots, n}{y_i \in (x_i - r, x_i + r)}$$

$$\therefore B_{d_\infty}(\vec{x}, r) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - r, x_i + r) \in \beta \subseteq \mathcal{T}.$$

- $\mathcal{T}_{d_\infty} \supseteq \mathcal{T}$: Basta probar que $\beta \subseteq \mathcal{T}_{d_\infty}$.

Sea $U = U_1 \times \cdots \times U_n \in \beta$, y $\vec{x} \in U$. Luego, $x_i \in U_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.

U_i abierto usual en $\mathbb{R} \Rightarrow \exists r_i > 0 \ / \ (x_i - r_i, x_i + r_i) \subseteq U_i$.

Sea $r = \min\{ r_1, \ldots, r_n \}$. Luego, $(x_i - r, x_i + r) \subseteq (x_i - r_i, x_i + r_i) \subseteq U_i$.

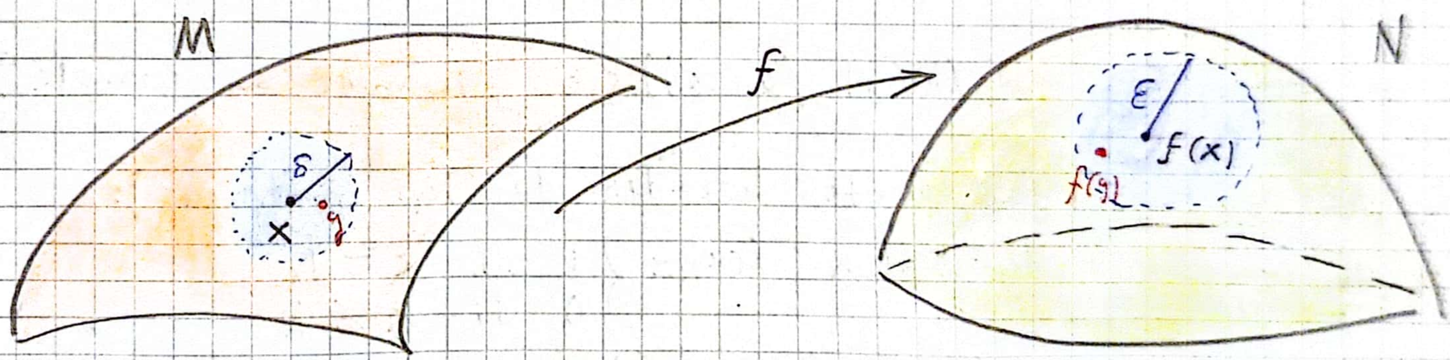
Así, $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - r, x_i + r) \subseteq U$. $\therefore U \in \mathcal{T}_{d_\infty}$.

ESTRATO 02: CONTINUIDAD

A la hora de estudiar estructuras matemáticas sobre conjuntos, es importante investigar cuáles son las funciones que preservan dichas estructuras. En el caso de espacios topológicos, tales funciones son las funciones continuas. Nosotros nos enfocaremos en funciones continuas sobre espacios métricos.

<u>Definición</u>: Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos y $f: M \to N$ una función. Dado $x \in M$, diremos que f es continua en x si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ d(y, x) < \delta \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$



Dado $U \subseteq M$, diremos que f es continua en U si f es continua en x para todo $x \in U$.

<u>Observación</u>: Vamos a dar varias caracterizaciones del concepto anterior a lo largo de las notas. Podemos empezar con lo siguiente:

- $d(y, x) < \delta$ sii $y \in B_d(x, \delta)$
- $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$ sii $f(y) \in B_\rho(f(x), \varepsilon)$ sii $y \in f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon$

Entonces, f es continua en x si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x), \varepsilon))$. Esto dará una caracterización más fuerte y general más adelante.

Ejemplos:

1) (funciones siempre continuas):

Sea $c \in N$ fijo y $f_c : M \to N$ la función constantemente igual a c, i.e., $f_c(x) = c \quad \forall x \in M$.

f_c siempre es continua sin importar las métricas fijadas sobre M y N. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y tomamos cualquier $\delta > 0$. Así:

$$d(y, x) < \delta \implies \underbrace{\rho(f_c(y), f_c(x))}_{\rho(c,\, c) = 0} < \varepsilon$$

(La condición $\rho(f_c(y), f_c(x)) < \varepsilon$ siempre se cumple).

2) (la continuidad puede depender de las métricas):

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Si se equipa a $\mathbb{R}$ con la métrica usual, f no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Sea d la métrica discreta. $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ es continua. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$. Vemos que

$$d(f(y), f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(y) \neq f(x) \\ 0 & \text{si } f(y) = f(x) \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$:
- Si $\varepsilon \geq 1$, sirve tomar cualquier $\delta > 0$ en la definición de continuidad.
- Si $\varepsilon \in (0, 1)$, sirve tomar $\delta = 1$ en la definición de continuidad.

3) (funciones lipschitzianas): Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos y $f: M \to N$ una función. Diremos que f es lipschitziana si existe $c > 0$ (constante de Lipschitz) tal que

$$\rho(f(y), f(x)) \leq c \cdot d(y, x)$$
$$\forall x, y \in M.$$

Cuando $c = 1$, f recibe el nombre de contracción débil.

Veamos que tales f son continuas (en todo punto de M). Sea $x \in M$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon / c$ y supongamos que $d(y, x) < \delta$. Luego,

$$\rho(f(y), f(x)) \leq c \cdot d(y, x) < c \cdot \delta = \varepsilon.$$

$\therefore$ f es continua en x, $\forall x \in M$.