Curso: HORMIGÓN ESTRUCTURAL 1

Práctico 5
Análisis de rotura

Agustín Vidal (avidal@fing.edu.uy)

1er Semestre - 2024

Universidad de la República - Uruguay

Objetivos

- **Analizar el proceso de rotura de una viga simplemente armada.**
- **Construir el diagrama Momento – Curvatura.**
- **Repasar los conceptos de cuantía mecánica y cuantía geométrica.**

Proceso de carga y rotura

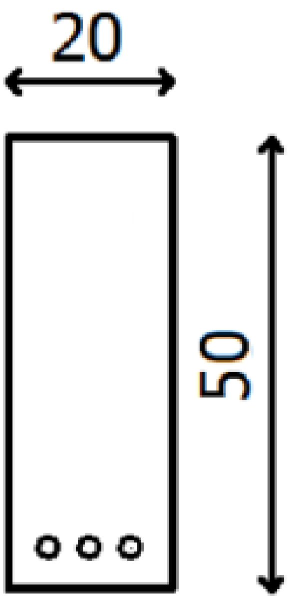
En el proceso de carga la sección más solicitada pasa por tres estados diferentes:

- **Estado I** (materiales en comportamiento elástico-lineal): Tensiones proporcionales a las deformaciones. El hormigón colabora a tracción.

- **Estado II** (hormigón fisurado): Cuando se alcanza la resistencia a tracción del hormigón, la pieza se fisura. Nuevo equilibrio, con la sección fisurada (el hormigón no colabora a tracción). Este estado se sub-divide en dos:
  - Estado IIa: Fase inicial, cuando ambos materiales continúan en el tramo lineal.
  - Estado IIb: Cuando por lo menos uno de los materiales sale del tramo lineal.

- **Estado III** (pre-rotura): límite del estado anterior, con uno de los materiales en su deformación máxima. Normalmente, la línea neutra sube lo máximo posible, y se alcanza el brazo de par máximo (z máximo).

Ejemplo



- **Materiales:**
  - $f_{ck} = 30\ \text{MPa}$
  - $f_{yk} = 500\ \text{MPa}$
  - $E_s = 200\ \text{GPa}$
- **Recubrimiento mecánico:**
  - $r = 50\ \text{mm}$
- **Armadura:**
  - $2\phi 16 + 1\phi 20\ (7.16\ \text{cm}^2)$

Cálculo de resistencias de diseño:

- $f_{cd} = 30\ \text{MPa}/1.5 = 20\ \text{MPa}$
- $f_{yd} = 500\ \text{MPa}/1.15 = 434.78\ \text{MPa}$

Cálculo del módulo elástico del hormigón (EHE-08 Art. 39.6):

- $E_{cm} = 8500\sqrt[3]{f_{ck} + 8} = 8500\sqrt[3]{30 + 8} = 28.58\ \text{GPa}$

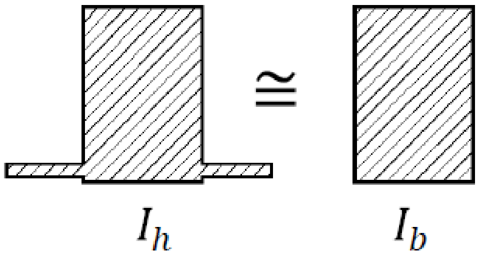
Ejemplo

- **Estado I – Pre fisuración**

Se utilizará la inercia bruta de la sección I_b ya que no son considerables las diferencias al homogeneizar la sección para cuantías habituales de acero.

Inercia

(Sección equivalente homogénea) (Sección bruta)



Este estado está comprendido entre $M = 0$ y $M = M_{fis}$, siendo M_{fis} el momento de fisuración de la sección. **¿Cómo se define $\mathbf{M_{fis}}$?**

$f_{ctm,fl}$: Resistencia media a la flexotracción del hormigón.

Adoptaremos $f_{ctm,fl} = 0.2\, f_{cd} = 4$ MPa

La tensión normal en la fibra más traccionada se halla como:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I_b} \text{ con } y = h/2 \Rightarrow \sigma = \frac{M\,h}{2\,I_b}$$

Igualando la tensión de tracción máxima en la sección a $f_{ctm,fl}$ obtenemos M_{fis}.

$$f_{ctm,fl} = \frac{M_{fis}\,h}{2\,I_b} \Rightarrow M_{fis} = \frac{2\,I_b\,f_{ctm,fl}}{h}$$

Ejemplo

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- **Estado I – Pre fisuración**

$$M_{fis} = \frac{2\, I_b\, f_{ctm,fl}}{h}$$

$$I_b = \frac{b\, h^3}{12} = \frac{0.2 \times 0.5^3}{12} = 2.08 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^4$$

$$M_{fis} = \frac{2 \times 2.08 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^4 \times 4\ \mathrm{MPa}}{0.50\ \mathrm{m}} = 33.3\ \mathrm{kNm}$$

Relación Momento – Curvatura:

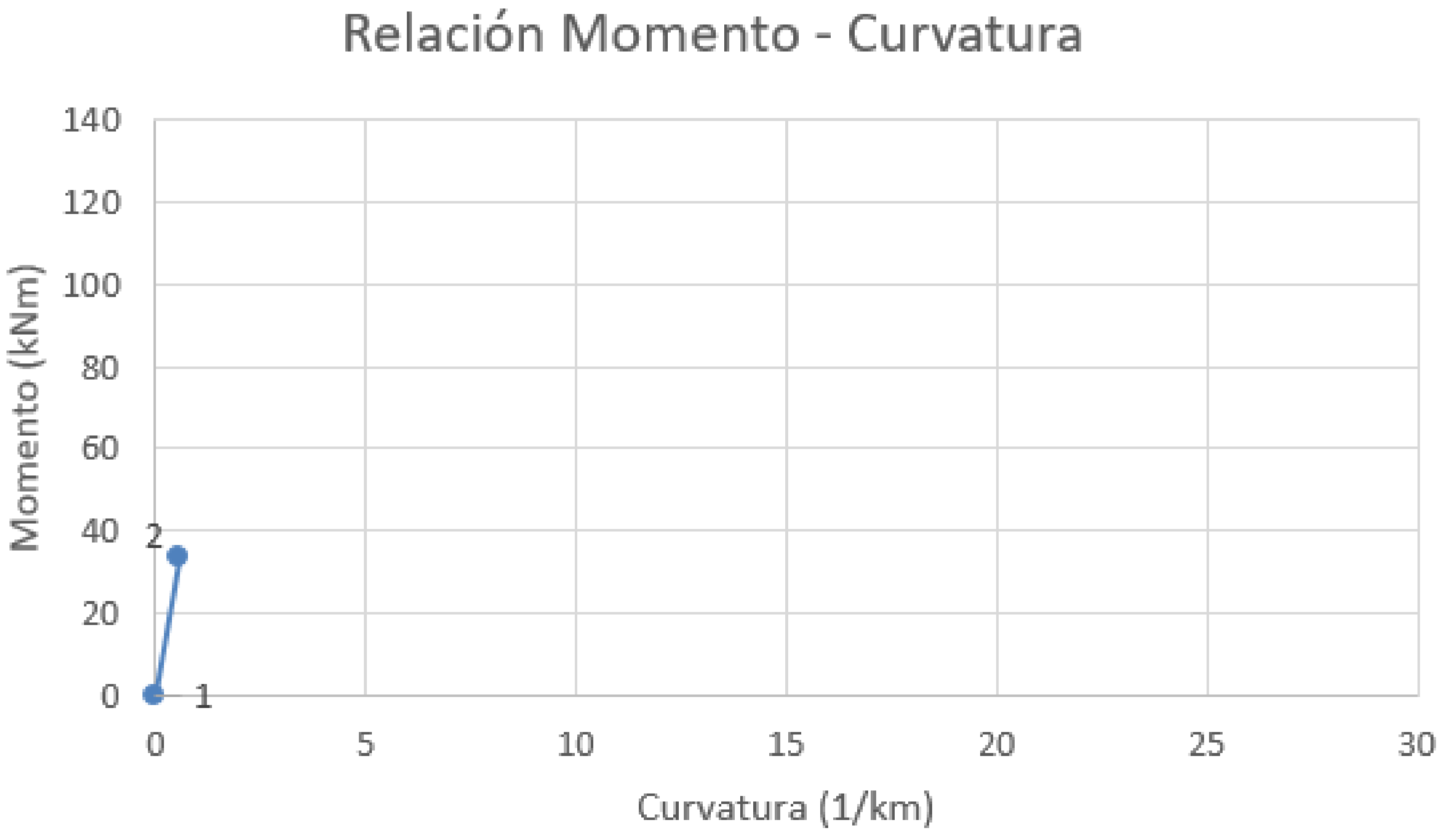
$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Estado I: $EI = E_{cm}\ I_b = cte$ (pendiente del diagrama constante)

- Punto 1 : $M = 0$
- Punto 2: $M = M_{fis}, \chi = \frac{M_{fis}}{E_{cm}\, I_b} = \frac{33.3\ \mathrm{kNm}}{28.58\ \mathrm{GPa} \times 2.08 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^4} = 5.6 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^{-1}$

Ejemplo

- **Estado I – Pre fisuración**



Ejemplo

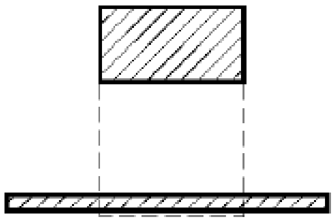
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

El hormigón ha fisurado y no colabora en el equilibrio de la sección. Se empleará en los cálculos la inercia fisurada homogeneizada a hormigón, que llamaremos I_{fis}.

Inercia

(Sección fisurada, equivalente)

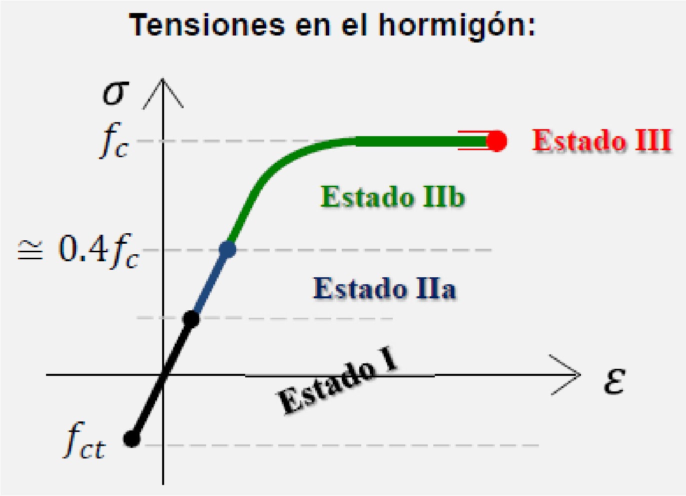


I_{fis}

Tanto el hormigón como el acero se encuentran dentro de su rango de comportamiento elástico lineal.

Este estado está comprendido entre $M = M_{fis}$ y $M = M_y$ **¿A qué corresponde M_y?**

M_y corresponde al momento en que el acero comienza a fluir por tracción o el hormigón llega a su límite lineal, lo que suceda primero.

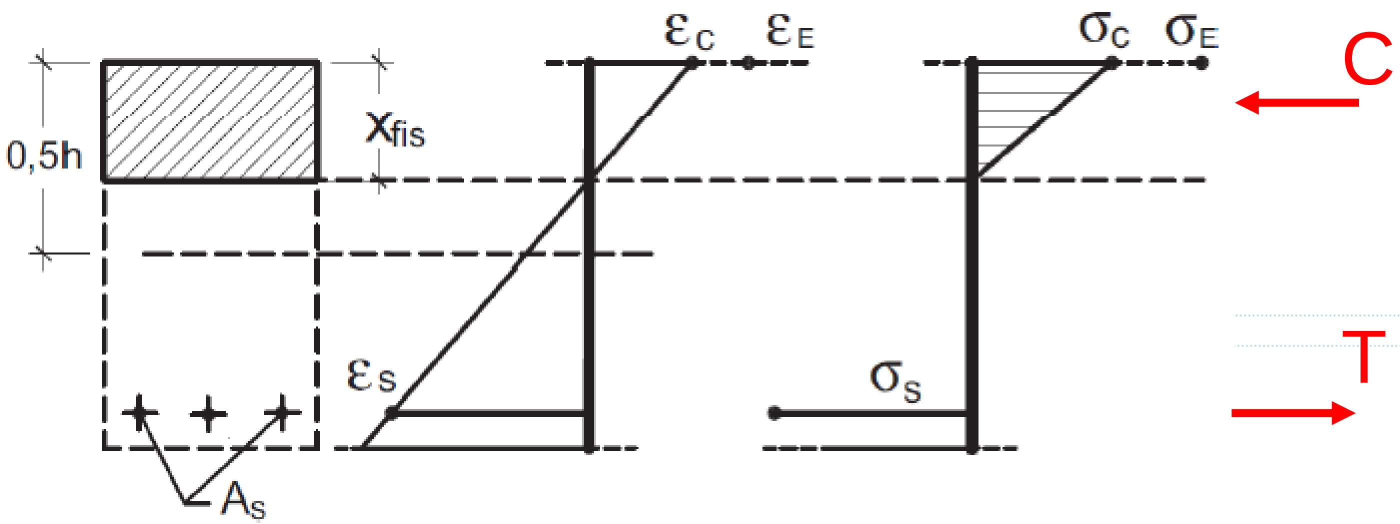


Ejemplo

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

Hallamos el momento M_y para la sección en estudio.



$C = \frac{\sigma_c \, x_{fis}}{2} b$ Como estamos en comportamiento elástico lineal $C = \frac{E_{cm} \, \varepsilon_c \, x_{fis}}{2} b$

$T = \sigma_s \, A_s$ Por estar en comportamiento elástico lineal $T = E_s \, \varepsilon_s \, A_s$

Aplicando Thales podemos relacionar ε_c y ε_s:

$$\frac{\varepsilon_c}{x_{fis}} = \frac{\varepsilon_s}{d - x_{fis}} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{d - x_{fis}}{x_{fis}} \varepsilon_c \Rightarrow T = E_s A_s \frac{d - x_{fis}}{x_{fis}} \varepsilon_c$$

Ejemplo

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

Aplicando equilibrio en la sección C = T, por lo tanto:

$$\frac{E_{cm}\ \varepsilon_c\ x_{fis}}{2} b = E_s A_s \frac{d - x_{fis}}{x_{fis}} \varepsilon_c \Rightarrow \frac{E_{cm}\ b}{2} x_{fis}^2 + E_s A_s x_{fis} - E_s A_s d = 0$$

Despejando se obtiene $x_{fis} = 12.7$ cm.

Notar que el valor de x_{fis} es independiente de las deformaciones y las tensiones de la sección o sea que es independiente del momento externo aplicado (la profundidad de la línea neutra es constante como sucedía en el estado I).

Conocida x_{fis} podemos hallar el valor de la inercia fisurada homogeneizada I_{fis}.

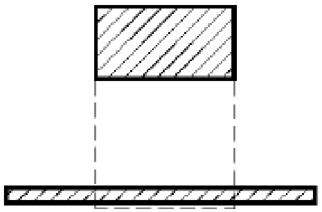
Para hallar el baricentro de la sección homogeneizada, medido desde la cara superior de la sección:

$$x_G = \frac{b x_{fis} \times x_{fis}/2 + n A_s d}{b x_{fis} + n A_s} = 12.7 \text{ cm} = x_{fis}$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}}$$

Inercia

(Sección fisurada, equivalente)



I_{fis}

¿Siempre coinciden x_G y x_{fis}?

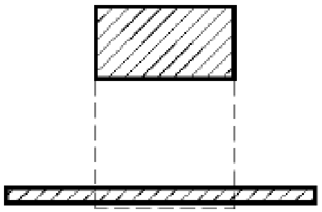
Ejemplo

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

$$I_{fis} = \frac{b\, x_{fis}^3}{12} + b\, x_{fis} \left(\frac{x_{fis}}{2}\right)^2 + n\, A_s \left(d - x_{fis}\right)^2 = 65.96 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^4$$

Inercia

(Sección fisurada, equivalente)



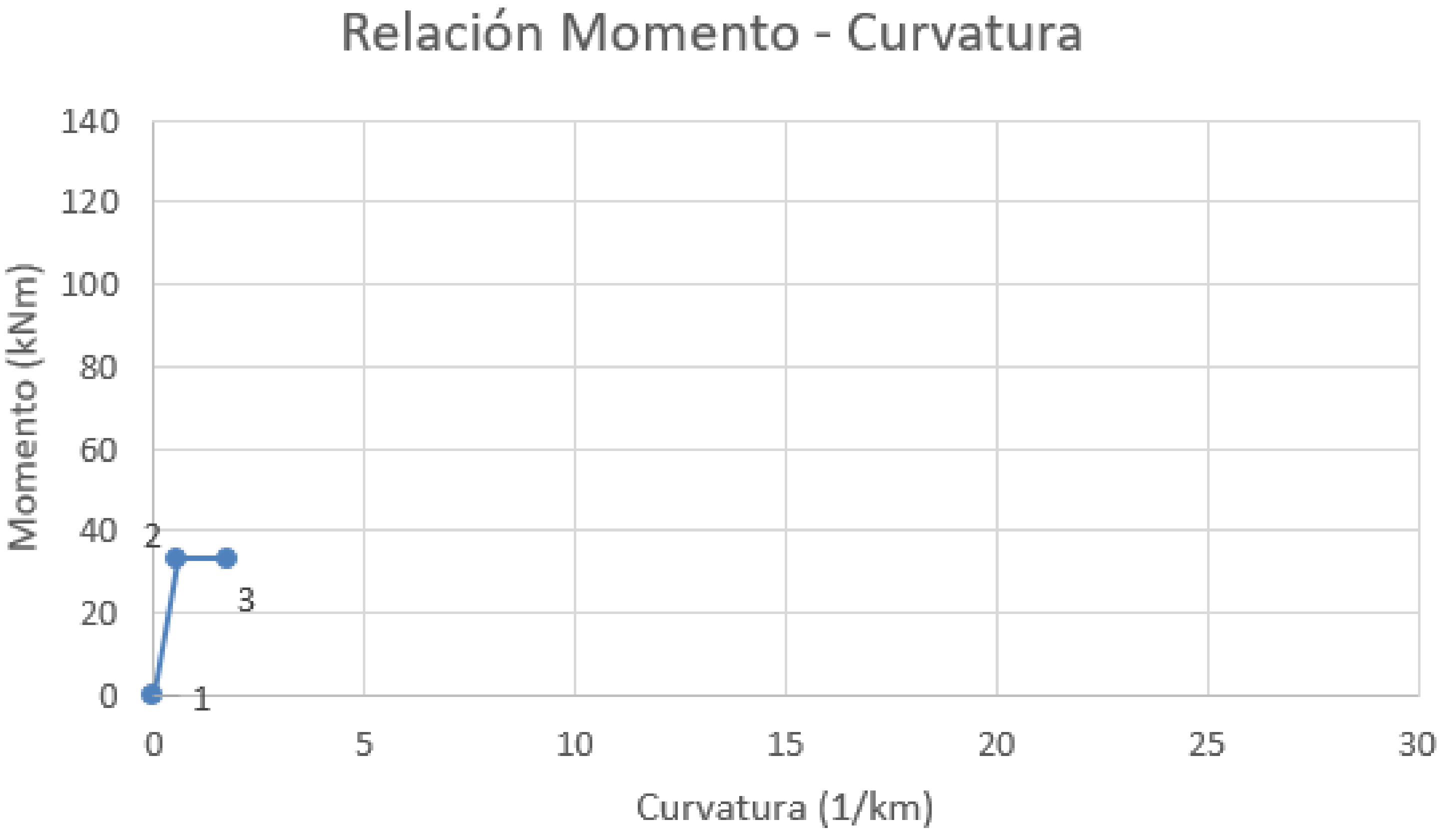
I_{fis}

Relación Momento – Curvatura:

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Estado II: $EI = E_{cm}\ I_{fis} = cte$ (pendiente del diagrama constante)

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**



Ejemplo

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

Resta determinar el límite del estado IIa dado por el momento M_y.

Suponiendo que M_y se corresponde con la llegada al límite lineal del hormigón:

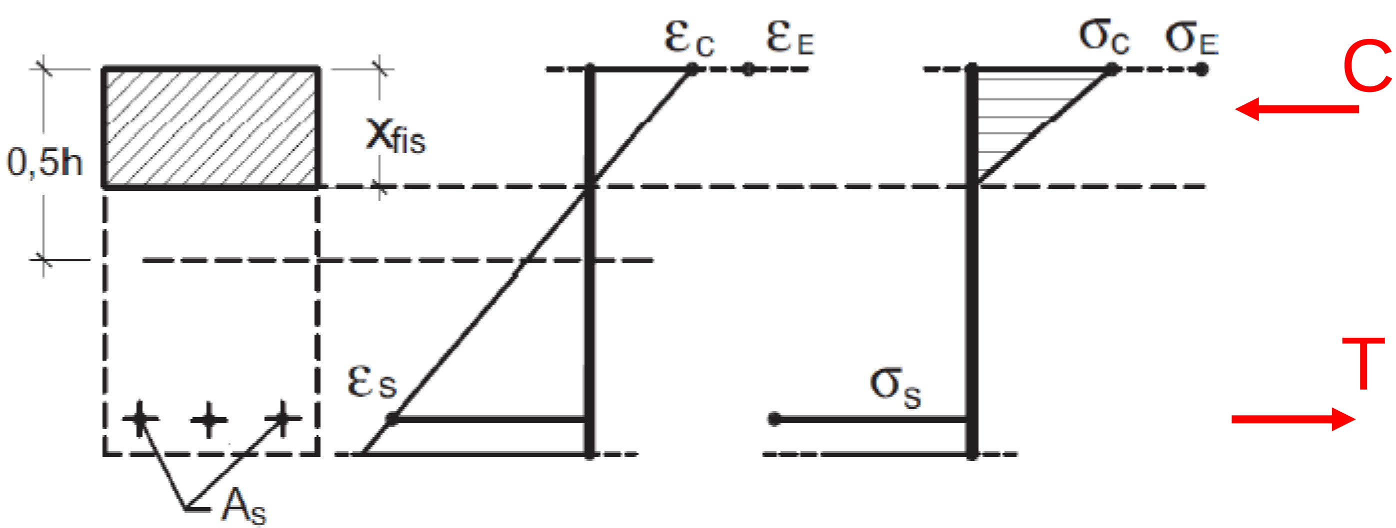
$$\sigma_c = 0.4\ f_{cd} = 8\ MPa \Rightarrow \varepsilon_c = \sigma_c / E_{cm} = 0.28\ ‰$$

Aplicando Thales:

$$\varepsilon_s = \frac{d - x_{fis}}{x_{fis}} \varepsilon_c \Rightarrow \varepsilon_s = 0.71\ ‰$$

Dado que $\varepsilon_s < \varepsilon_{fl} = f_{yd}/E_s = 2.17\ ‰$ la hipótesis realizada es correcta.

$$M_y = \sigma_c \frac{I_{fis}}{x_{fis}} = 41.5\ \text{kNm}$$



Ejemplo

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

  Relación Momento – Curvatura:

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

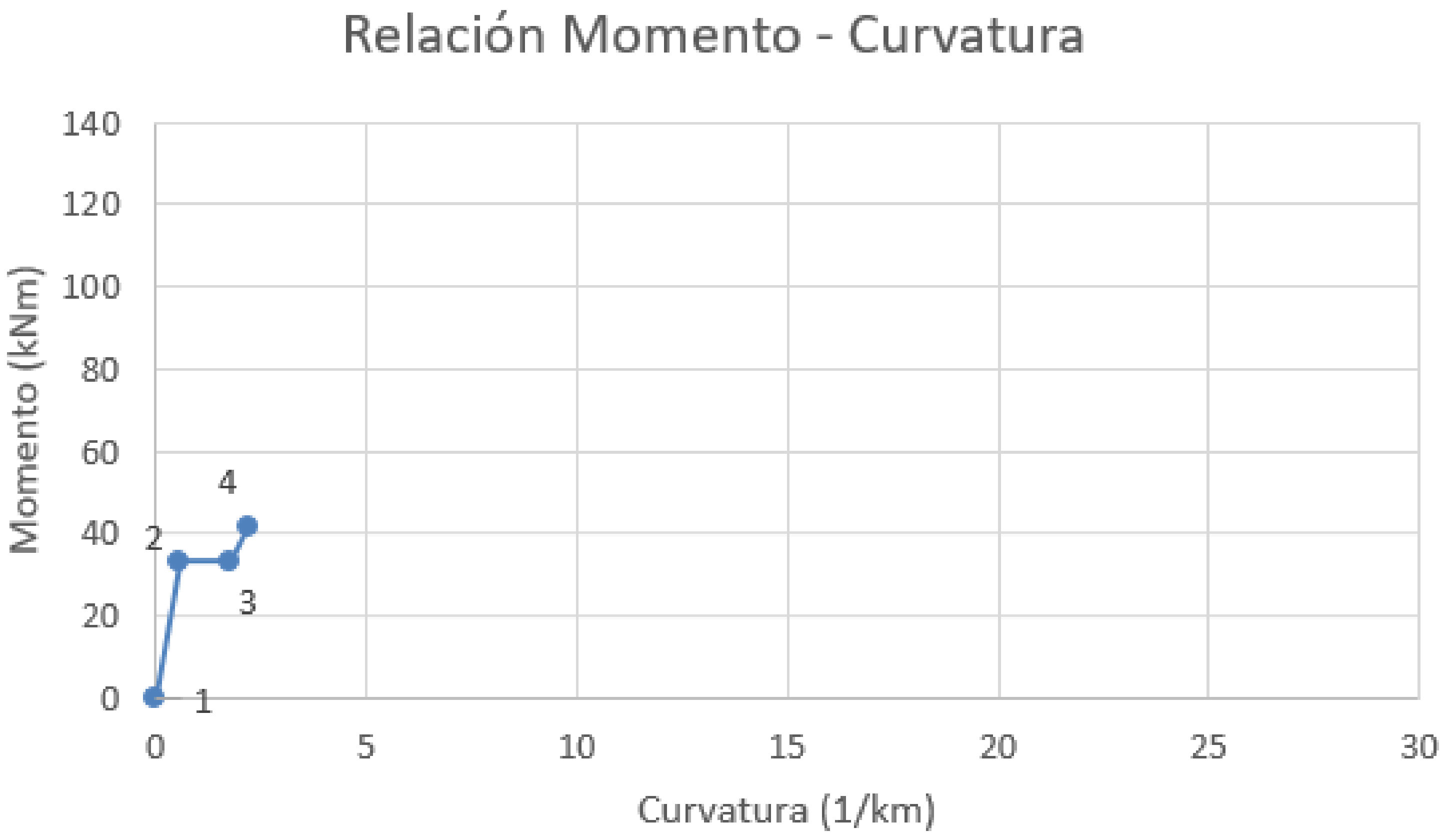
  Estado II: $EI = E_{cm}\ I_{fis} = cte$ (pendiente del diagrama constante)

  – Punto 4 : $M = M_y, \chi = \frac{M_y}{E_{cm}\, I_{fis}} = \frac{41.5\ \text{kNm}}{28.58\ \text{GPa}\times 65.96\times 10^{-5}\ \text{m}^4} = 2.20 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$

Ejemplo

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- **Estado IIa – Sección fisurada, comportamiento lineal**

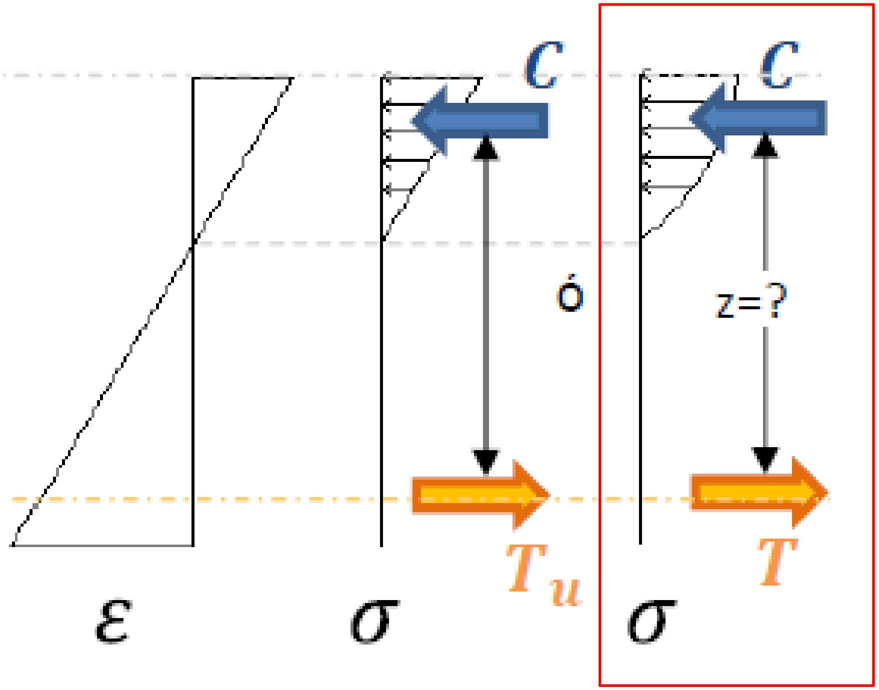


Ejemplo

- **Estado IIb – Sección fisurada, comportamiento no lineal**

Este estado está comprendido entre $M = M_y$ y $M = M_u$, siendo M_u el momento último de la sección.

En nuestro ejemplo se incia cuando el hormigón comienza a plastificar por su fibra más comprimida y seguirá deformándose, variando C, T y z hasta llegar a una configuración de deformación límite asociada al momento último M_u.



Ejemplo

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- **Estado III – Pre rotura**

La sección alcanza un plano de deformación última.

Aplicando ecuaciones adimensionales:

$$\omega = \frac{A_s\, f_{yd}}{bd\, f_{cd}} = 0.173$$

$$\mu = \omega(1 - \omega/2) = 0.158$$

$$\xi = \omega/0.8 = 0.216$$

Momento último: $M_u = \mu b d^2 f_{cd} = 128.0$ kNm.

Profundidad de la línea neutra: $x = \xi d = 9.73$ cm.

El plano de deformación última se encuentra en el Dominio 2, por lo tanto $\varepsilon_s = 10$ ‰.

Aplicando Thales:

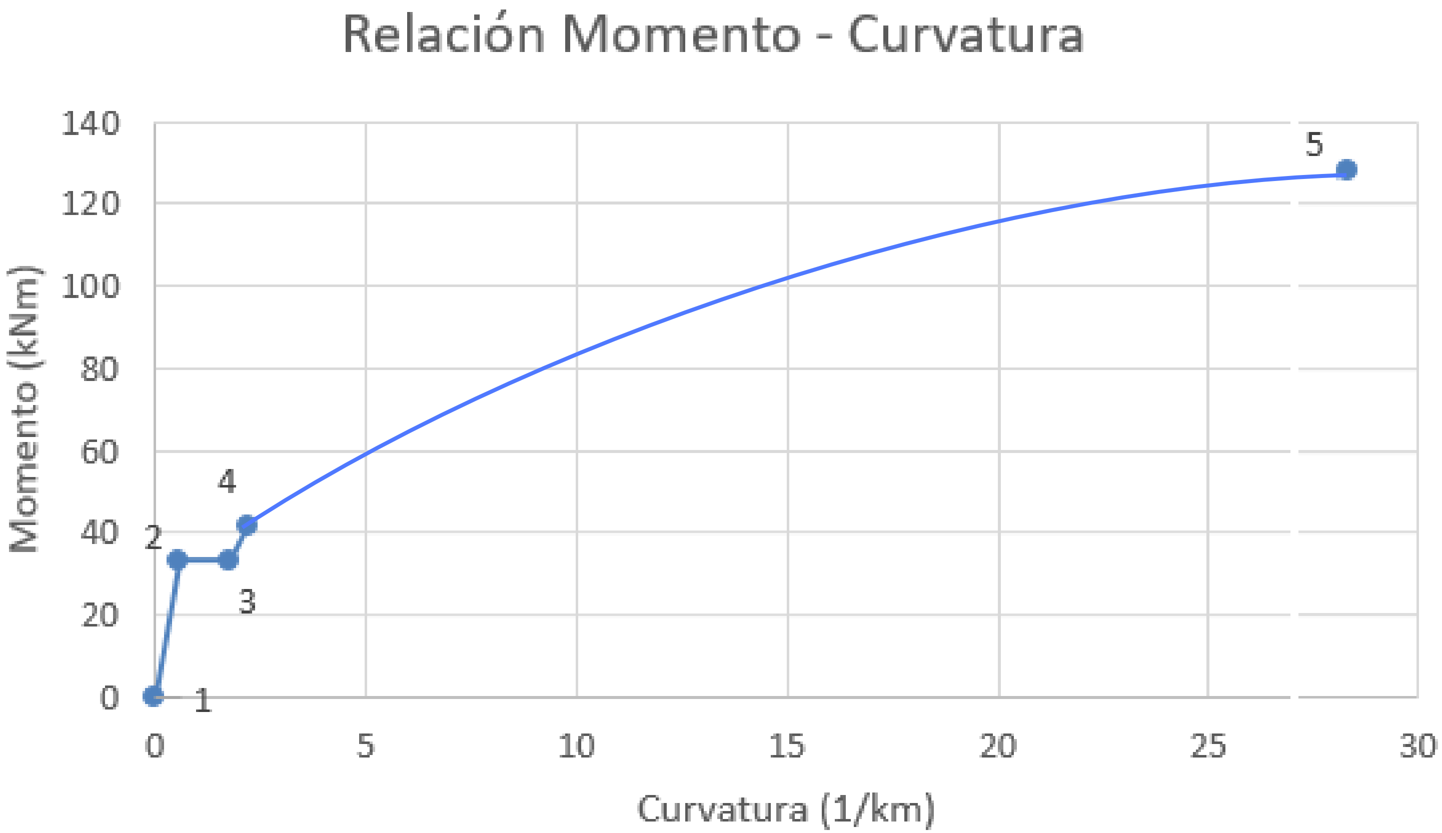
$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{x}{d-x}\varepsilon_s \Rightarrow \varepsilon_c = 2.76 \text{ ‰}$$

Relación Momento – Curvatura:

– Punto 5 : $M = M_u$, $\chi = \frac{\varepsilon_s}{d-x} = 28.35 \times 10^{-3}$ m^{-1}

Ejemplo

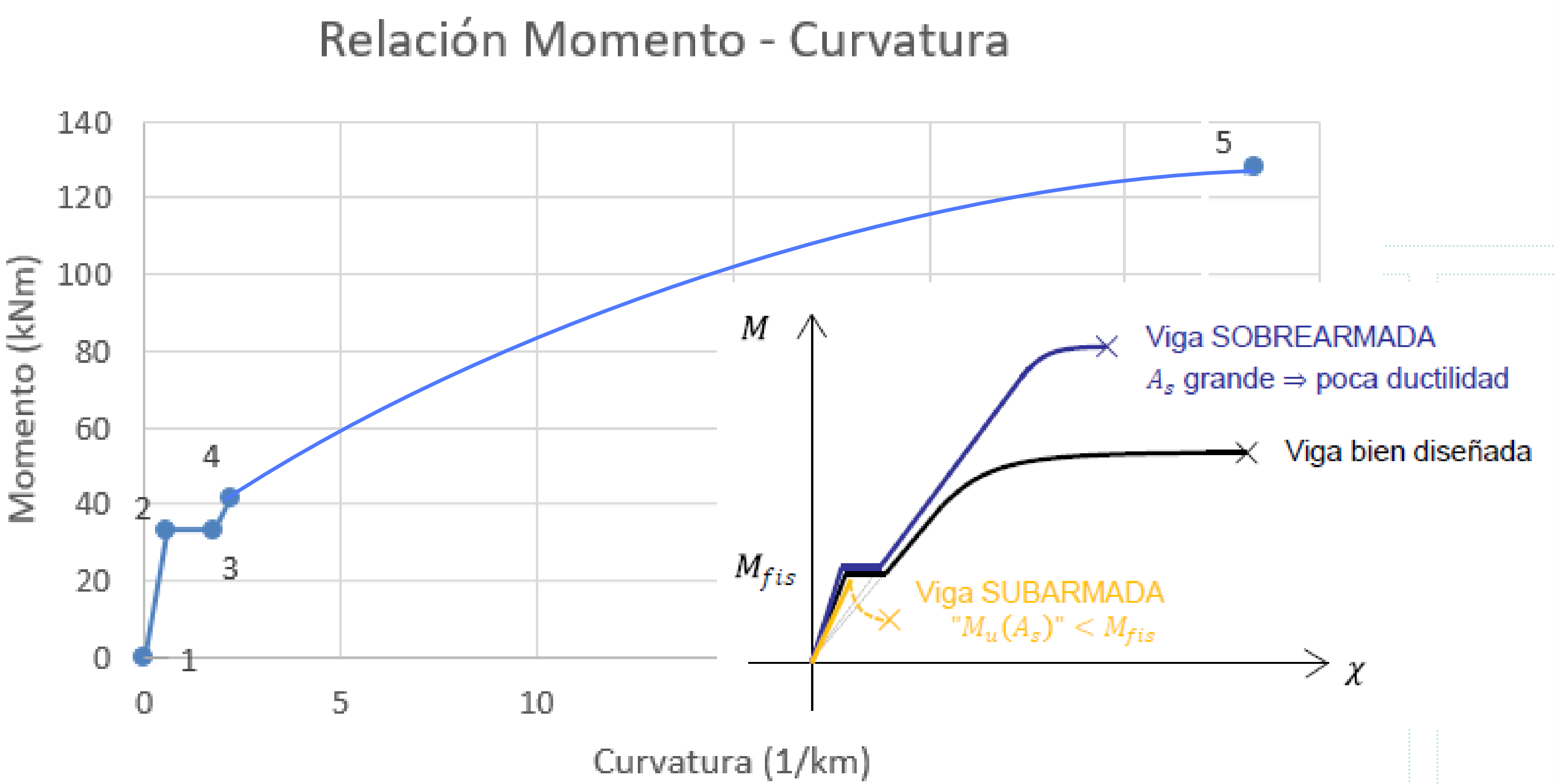
- **Estado III – Pre rotura**



Ejemplo

- **Estado III – Pre rotura**

¿Cómo se relaciona este gráfico con la cuantía mecánica?



Here comes the end