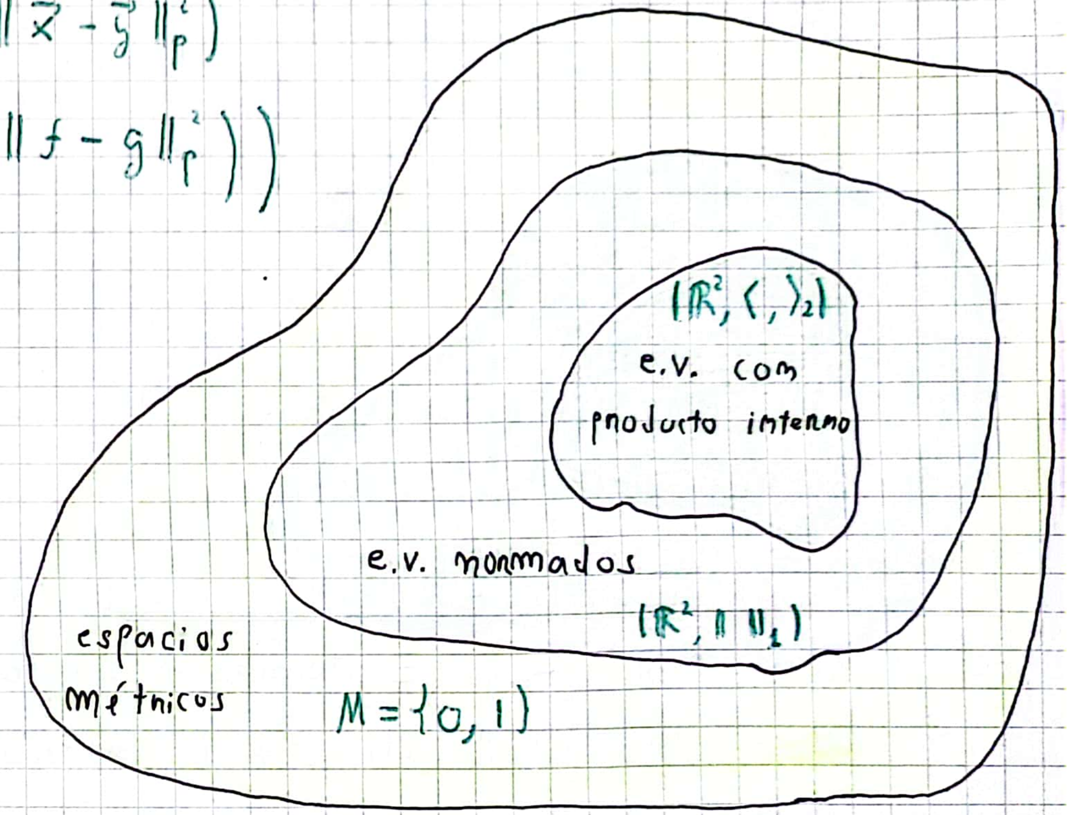
<u>Ejemplo</u>: Sobre $\mathbb{R}^n$ o $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, $\| \, \|_p$ está inducida por un producto interno si y solamente si $p=2$. Esto se debe a que la operación

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|_p^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_p^2 \right)$$

$$\left(\text{o} \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|_p^2 - \|f-g\|_p^2 \right) \right)$$

no es aditiva para $p \neq 2$.

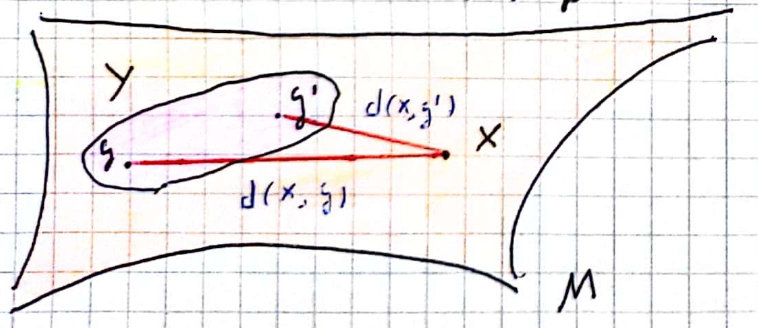


Distancia de un punto a un conjunto

Distancia entre conjuntos

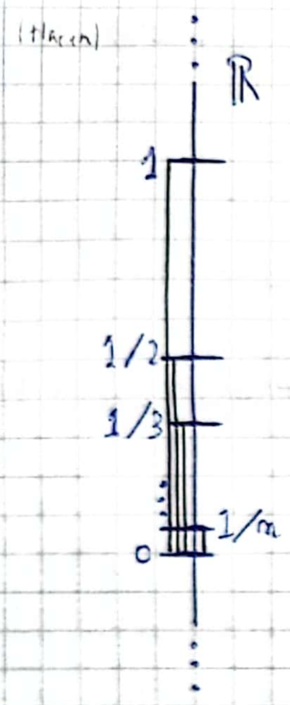
Dado un espacio métrico (M, d), podemos aprovechar d para calcular distancias entre puntos y subconjuntos o entre subconjuntos de M.

Dado $x \in M$ e $Y \subseteq M$, $Y \neq \emptyset$, para cada $y \in Y$ tenemos $d(x,y) \geq 0$.



Así, $\{ d(x,y) \, / \, y \in Y \}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado inferiormente, por lo cual posee ínfimo.

<u>Definición</u>: $d(x, Y) := \inf \{ d(x,y) \, / \, y \in Y \}$.



Observaciones: (1) A partir de la definición de ínfimo, se tiene que

- $d(x,Y) \leq d(x,y)$, $\forall y \in Y$.
- Si $d(x,Y) < K$, entonces existe $y \in Y$ tal que $d(x,y) < K$ (equivalentemente, $K \leq d(x,y)\ \forall y \in Y \Rightarrow K \leq d(x,Y)$).

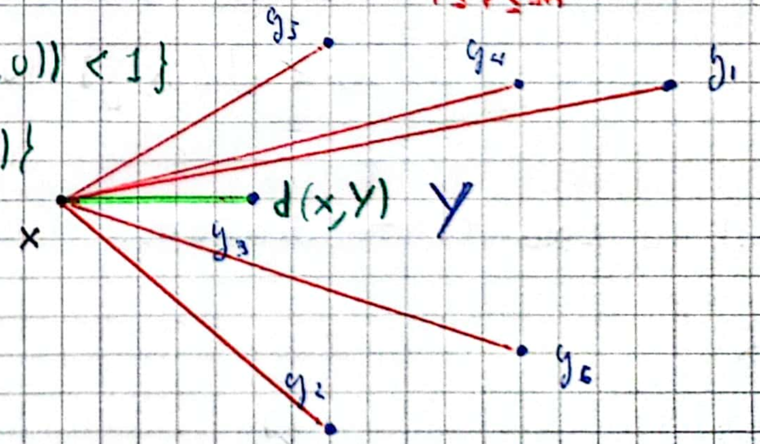
(2) $x \in Y \Rightarrow d(x,Y) = 0$.

Sin embargo, $d(x,Y) = 0$ no implica necesariamente que $x \in Y$. Por ejemplo, para $(\mathbb{R}, d)$ con d la métrica euclídea, $x = 0$ e $Y = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}$, se tiene que

$$0 \notin Y \quad \text{y} \quad d(0,Y) = \inf\{|0 - 1/n| / n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = 0.$$

Vemos así que el valor $d(x,Y)$ no necesariamente se alcanza en un punto $y \in Y$.

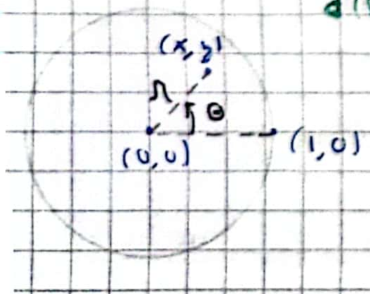
(3) Si $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ es un conjunto finito, entonces $d(x,Y) = \min_{1 \leq i \leq m} \{d(x,y_i)\}$



(Hacer)

Ejemplo: $x = (1,0)$, $Y = B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d_2((x,y),(0,0)) < 1\}$

$$d((1,0),Y) = \inf\{\|(1,0) - re^{i\theta}\| : r \in [0,1),\ \theta \in [0,2\pi)\}$$
$$\leq \inf\{\|(1,0) - (r,0)\| : r \in [0,1)\} = 0$$



$\therefore\ d((1,0),Y) = 0.$

Se puede generalizar el argumento anterior y notar que: (dejar como ejercicio)

$$(x,y) \in \overline{B}((0,0),1) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / d_2((a,b),(0,0)) \leq 1\} \Rightarrow d((x,y), B((0,0),1)) = 0.$$

El recíproco de la implicación anterior también es cierto. En efecto, supongamos que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto tal que $d((x,y), B((0,0),1)) = 0$. Sea (a,b) en $B((0,0),1)$ arbitrario. Por la desigualdad triangular, tenemos que:

$$|d((x,y),(0,0)) - d((x,y),(a,b))| \leq d((a,b),(0,0)) < 1$$

$$-1 < d((x,y),(0,0)) - d((x,y),(a,b)) < 1$$

$$0 \leq d((x,y),(0,0)) < 1 + d((x,y),(a,b))$$

Supongamos que $(x,y) \notin \overline{B}((0,0),1)$, es decir, $d((x,y),(0,0)) > 1$. Luego

$$0 < d((x,y),(0,0)) - 1 < d((x,y),(a,b)) \quad \forall (a,b) \in B((0,0),1).$$

Por definición de ínfimo, nos queda

$$0 < d((x,y),(0,0)) - 1 \leq \underbrace{d((x,y), B((0,0),1))}_{=0},$$

lo cual es una contradicción.

Del ejemplo anterior notamos que, dado un espacio métrico (M, d) y $x, y, z \in M$, entonces

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

El siguiente resultado es una generalización de la desigualdad anterior.

<u>Proposición</u>: Sea (M, d) un espacio métrico y $Y \subseteq M$ no vacío. Para $x, z \in M$, se tiene que

$$|d(x,Y) - d(z,Y)| \leq d(x,z).$$

(demostrar).

• <u>Demostración</u>: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(x,Y) \geq d(z,Y)$.
Probemos que $d(x,Y) \leq d(z,Y) + d(x,z)$.
Sea $y \in Y$. Por la desigualdad triangular, tenemos $d(x,y) \leq d(z,y) + d(x,z)$.
Por otro lado, $d(x,Y) \leq d(x,y)$. Así,

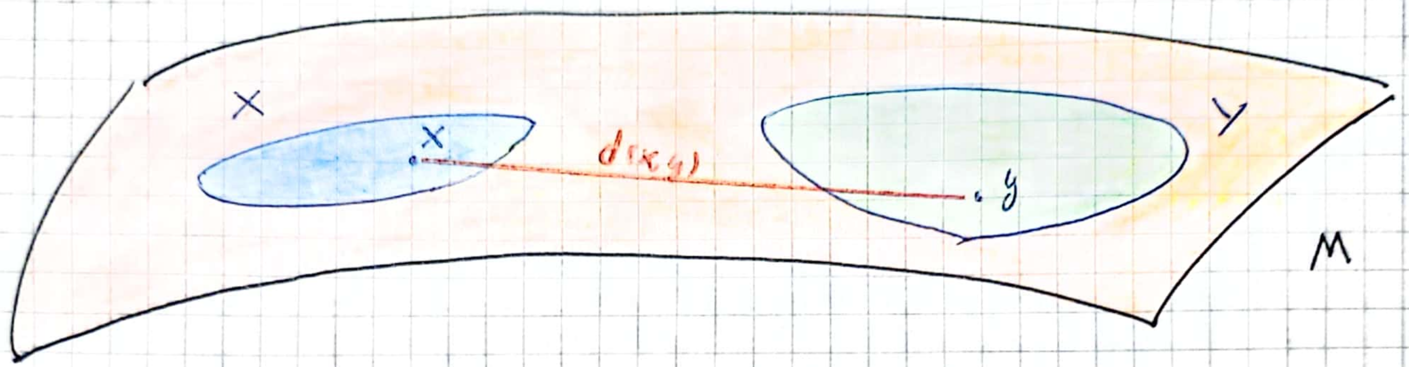
$$d(x,Y) \leq d(z,y) + d(x,z)$$
$$d(x,Y) - d(x,z) \leq d(z,y) \quad \forall y \in Y.$$

Por definición de ínfimo, obtenemos $d(x,Y) - d(x,z) \leq d(z,Y)$, es decir,

$$d(x,Y) - d(z,Y) \leq d(x,z) \qquad \blacksquare$$

Dado un espacio métrico (M, d), también podemos definir la distancia entre dos subconjuntos no vacíos $X, Y \subseteq M$:

<u>Definición</u>: $d(X,Y) = \inf \{ d(x,y) / x \in X, y \in Y \}.$



Observaciones:

1) $\{d(x,y) \,/\, x \in X,\ y \in Y\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado inferiormente, por lo cual $d(X,Y)$ está bien definida.

2) Si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $d(X,Y) = 0$. El recíproco no es cierto. Si consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica usual, para $X = (-1,0)$ e $Y = (0,1)$, se tiene que $X \cap Y = \emptyset$ y $d(X,Y) = 0$.

3) $d(X,Y) = \inf\{d(x,Y) \,/\, x \in X\} = \inf\{d(y,X) \,/\, y \in Y\}$.

Bolas y conjuntos acotados

La colección de espacios métricos forma parte de un tipo más general de estructura matemática conocida como espacio topológico. Informalmente hablando, un espacio topológico es un conjunto, a cuyos elementos llamamos "puntos", dentro del cual podemos definir una noción de de "cercanía" entre puntos. En varios casos, esta cercanía no se puede calcular es términos numéricos mediante una métrica. Si bien en este curso nos enfocaremos en espacios métricos, conviene entender por qué los espacios métricos son espacios topológicos. Además, vamos a analizar situaciones en los cuales dos métricas diferentes sobre un conjunto inducen la misma estructura de espacio topológico (o topología).

Para entender qué es una topología métrica es necesario el concepto de bola en un espacio métrico.

<u>Definición</u>: Sea (M, d) un espacio métrico, $x \in M$ y $r > 0$.

- Se define la bola abierta de centro x y radio r como el conjunto

$$B(x, r) := \{ y \in M \,/\, d(y, x) < r \}.$$

- Se define la bola cerrada de centro x y radio r como el conjunto

$$\overline{B}(x, r) := \{ y \in M \,/\, d(y, x) \leq r \}.$$

- Se define la esfera de centro x y radio r como el conjunto

$$S(x, r) := \{ y \in M \,/\, d(y, x) = r \}.$$

Lo anterior es una generalización natural del concepto de bola y esfera en $\mathbb{R}^m$. Geométricamente, las bolas pueden cambiar dependiendo de la métrica escogida, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: (Hacia)

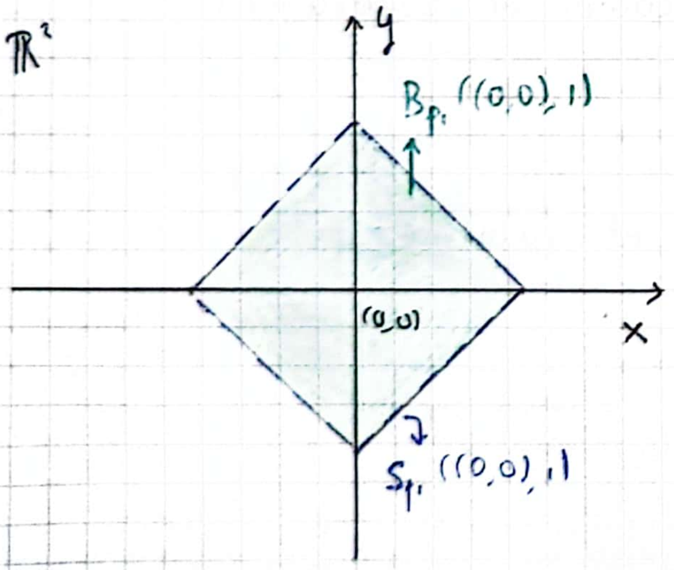
(1) Consideremos $\mathbb{R}^2$ con las métricas d_1, d_2 y d_∞, y tomemos $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y $r = 1$.

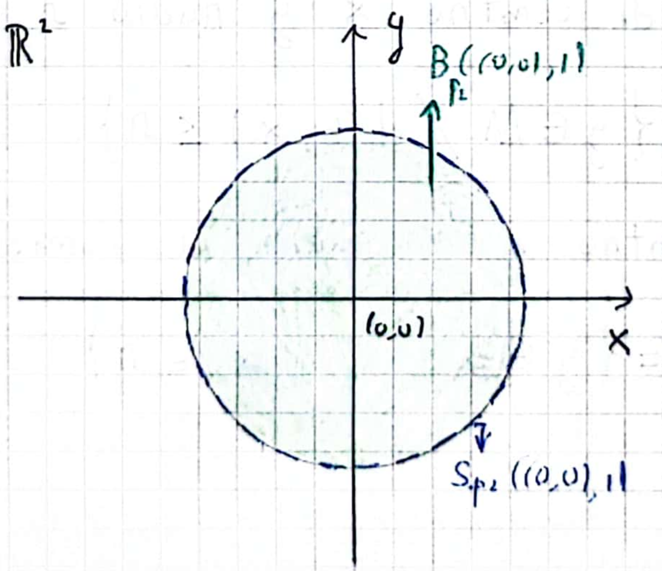
$d_1((x,y),(0,0)) = |x| + |y|$

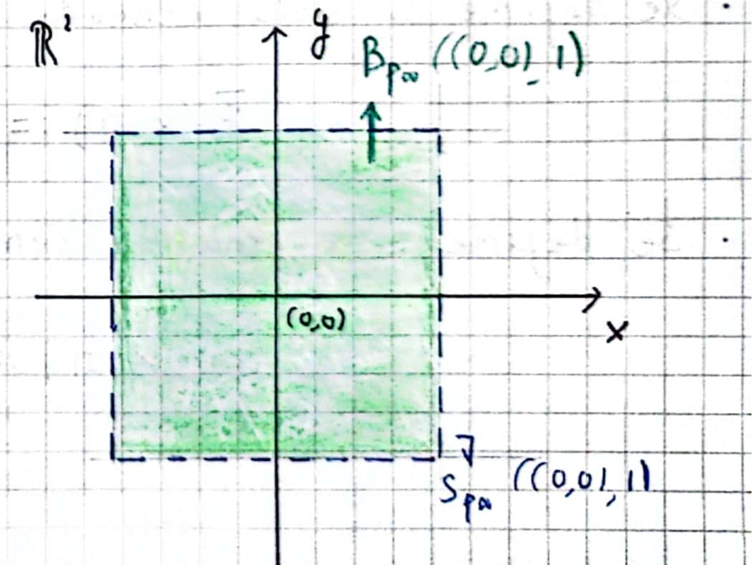
$d_2((x,y),(0,0)) = (x^2+y^2)^{1/2}$

$d_\infty((x,y),(0,0)) = \text{máx}\{|x|,|y|\}$.

Luego, $B_{d_p}((0,0),1)$, $\overline{B}_{d_p}((0,0),1)$ y $S_{d_p}((0,0),1)$ lucen como se muestra a continuación.







(tarea)

(2) Consideramos $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica d_∞.

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$, $\forall x\in[0,1]$.

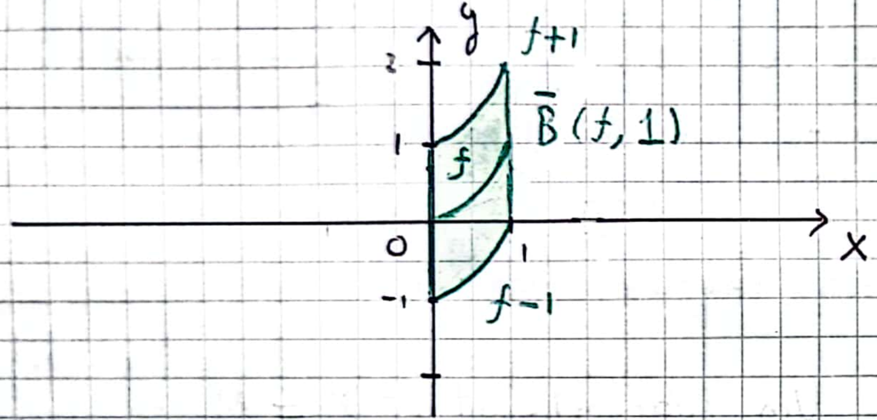
$\overline{B}(f,1)=\{g\in\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}) \,/\, \sup_{0\le x\le 1}|g(x)-x^2|\le 1\}$

Analicemos la condición $\sup_{0\le x\le 1}|g(x)-x^2|\le 1$. Ésta implica que:

$$|g(x)-x^2|\le 1,\ \forall x\in[0,1].$$

$$-1\le g(x)-x^2\le 1$$

$$x^2-1\le g(x)\le x^2+1$$



(tarea)

(3) Bolas en producto de espacios métricos:

Sean $(M_1,d_1),\dots,(M_n,d_n)$ espacios métricos y $M=M_1\times\cdots\times M_n$ con la métrica $\rho_\infty: M\times M\to\mathbb{R}$

$$\rho_\infty((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\max_{1\le i\le n}\{|x_i-y_i|\}.$$

Para cada $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ y $r>0$, se puede demostrar que:

$$B_{\rho_\infty}(\vec{x},r)=B_{d_1}(x_1,r)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,r).$$

Em efecto, sea $\vec{y}=(y_1,\dots,y_m)\in M$ tal que $p_\infty(\vec{y},\vec{x})<r$.
Luego, $\max\limits_{1\le i\le m}\{|y_i-x_i|\}<r$. Esto implica que $|y_i-x_i|<r$, $\forall i=1,\dots,m$, es decir,

$$y_i\in B_{d_i}(x_i,r)$$

Entonces, $\vec{y}\in B_{d_1}(x_1,r)\times\cdots\times B_{d_m}(x_m,r)$.
De manera similar, se puede mostrar que $B_{d_1}(x_1,r)\times\cdots\times B_{d_m}(x_m,r)\subseteq B_{p_\infty}(\vec{x},r)$.

Los conceptos de bola abierta y cerrada son esenciales para definir la noción de conjunto abierto y cerrado en un espacio topológico. También son importantes para generalizar la noción de conjunto acotado, importante para entender la compacidad en espacios métricos.

<u>Definición</u>: Sea (M,d) un espacio métrico. Un subconjunto $Y\subseteq M$ es **acotado** si existe una constante $K\geq 0$ tal que

$$d(x,y)\leq K,\quad \forall x,y\in Y.$$

<u>Proposición</u>: Dado un espacio métrico (M,d), se tiene que $Y\subseteq M$ es acotado si y solamente si existe $x\in M$ y $r>0$ tal que $M\subseteq \overline{B}(x,r)$. (No hacer)

- <u>Demostración</u>: Supongamos que Y es acotado. Si $Y=\emptyset$, cualquier $x\in M$ y $r>0$ cumple con la condición $Y\subseteq B(x,r)$. Para $Y\neq\emptyset$ sabemos que existe $K>0$ tal que $d(x,y)\leq K$ $\forall x,y\in Y$. Fijamos $x\in Y$. Tenemos que $\forall y\in Y$ se cumple que $d(y,x)\leq K$, es decir, $Y\subseteq\overline{B}(x,K)$.

Ahora supongamos que existe $x \in M$ y $r > 0$ tal que $Y \subseteq \bar{B}(x, r)$. Sean $y, y' \in Y$. Por la desigualdad triangular, tenemos

$$d(y,y') \leq d(y,x) + d(x,y') \leq r + r = 2r$$
$$d(y,y') \leq 2r \quad \forall y, y' \in Y.$$

Tomando $k = 2r$, tenemos que Y es acotado. ∎

Espacios topológicos y topologías métricas

Comenzamos directamente con la definición de topología.

Definición: Sea M un conjunto no vacío, y denotamos por $\mathcal{P}(M)$ al conjunto de partes de M, es decir,

$$\mathcal{P}(M) = \{ Y \subseteq M \}.$$

Una topología sobre M es un subconjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ tal que:

(1) $\emptyset, M \in \mathcal{T}$.

(2) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$. ($\mathcal{T}$ es cerrada bajo intersecciones finitas).

(3) $(U_i)_{i \in I}$ con $U_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias

- Los elementos de $\mathcal{T}$ son denominados abiertos de la topología $\mathcal{T}$.
- Al par $(M, \mathcal{T})$ le llamaremos espacio topológico.
- Dadas dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ sobre M, diremos que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$ (o que $\mathcal{T}'$ es más gruesa que $\mathcal{T}$) si $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

- Si $(M, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, un conjunto $X \subseteq M$ es cerrado si $X^c = M - X$ es abierto, es decir, $X^c \in \mathcal{T}$.

Los espacios topológicos también se pueden definir en función de sus conjuntos cerrados, como muestra la siguiente proposición:

<u>Proposición</u>: Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:

(1) $\emptyset$ y M son cerrados.

(2) Si $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia finita de cerrados, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ es cerrado.

(3) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} X_i$ es cerrado.

- <u>Demostración</u>:

(1) $\emptyset^c = M \in \mathcal{T}$ y $M^c = \emptyset \in \mathcal{T}$, por lo cual $\emptyset$ y M son cerrados.

(2) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c \in \mathcal{T}$, ya que la intersección finita de abiertos es abierto.

$\therefore \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ es cerrado.

(3) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} X_i^c \in \mathcal{T}$, ya que $X_i^c \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ y porque la unión arbitraria de abiertos es abierto.

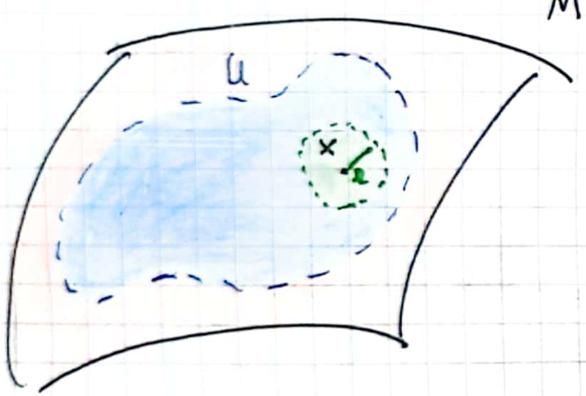
$\therefore \bigcap_{i\in I} X_i$ es cerrado ■

Pasemos ahora a analizar por qué los espacios métricos son espacios topológicos. Empezamos estableciendo quiénes serán los abiertos.

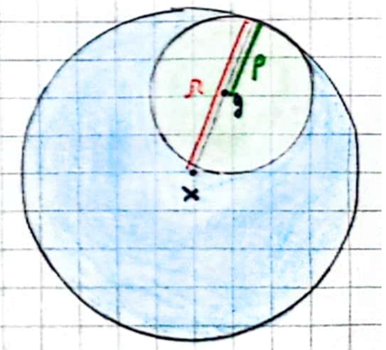
<u>Definición</u>: Sea (M, d) un espacio métrico, y $U \subseteq M$.

- $x \in U$ es un punto interior de U si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$.
- U se dice abierto si todo punto de U es interior.

Denotaremos por $\mathring{U}$ al conjunto de puntos interiores de U.



<u>Ejemplo</u>: Toda bola abierta $B(x, r) \subseteq M$ es un conjunto abierto.
Sea $y \in B(x, r)$. Considere $\rho = r - d(y, x)$. Veamos que $B(y, \rho) \subseteq B(x, r)$.
Sea $z \in B(y, \rho)$. Por la desigualdad triangular, tenemos que
$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r$, es decir,
$z \in B(x, r)$. $\therefore B(y, \rho) \subseteq B(x, r)$ y $\mathring{B}(x, r) = B(x, r)$.



Dado un espacio métrico (M, d), sea $\mathcal{T}_d$ el subconjunto de $\mathcal{P}(M)$ formado por los abiertos según la definición anterior. $\mathcal{T}_d$ resulta ser una topología sobre M, como veremos a continuación.

<u>Proposición</u>: $(M, \mathcal{T}_d)$ es un espacio topológico. (Hacer)

- <u>Demostración</u>: 1) Es claro que $\mathring{\emptyset} = \emptyset$ y $\mathring{M} = M$.

2) Sean $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_d$. Si $U_1 \cap \cdots \cap U_n = \emptyset$, no hay nada que demostrar.
Supongamos $U_1 \cap \cdots \cap U_n \neq \emptyset$ y sea $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

$\forall\, i = 1, \dots, m$, $\exists\, r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subseteq U_i$. Sea $r = \min\{r_1, \dots, r_m\}$. Luego, se tiene que $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq U_i$ $\forall\, i = 1, \dots, m$. Así, $B(x, r) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$, $\forall\, x$ en la intersección $U_1 \cap \dots \cap U_m$. $\therefore U_1 \cap \dots \cap U_m \in \mathcal{T}_d$.

3) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}_d$ y $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Luego, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como $U_i \in \mathcal{T}_d$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U_i$. Así, $B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ $\forall\, x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ $\therefore \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ ■

<u>Corolario</u>: Sea (M, d) un espacio métrico. Entonces, $U \subseteq M$ es abierto si, y solamente si, U es una unión de bolas abiertas. (ejercicio)

• <u>Demostración</u>: $(\Rightarrow)$ Si $U \in \mathcal{T}_d$, entonces $\forall\, x \in U$ $\exists\, r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq U$.

Así, $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$.

$(\Leftarrow)$ Si $U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$, entonces $U \in \mathcal{T}_d$ ya que $B(x_i, r_i) \in \mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_d$ es una topología por la proposición anterior ■

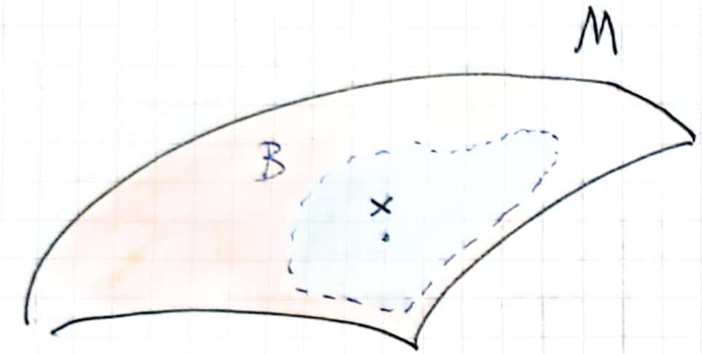
El corolario anterior básicamente nos dice que las bolas abiertas son los bloques de construcción de cualquier abierto en la topología métrica. Esto tiene que ver con el concepto de base de una topología.

<u>Definición</u>: Dado M un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq M$, diremos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre M si:

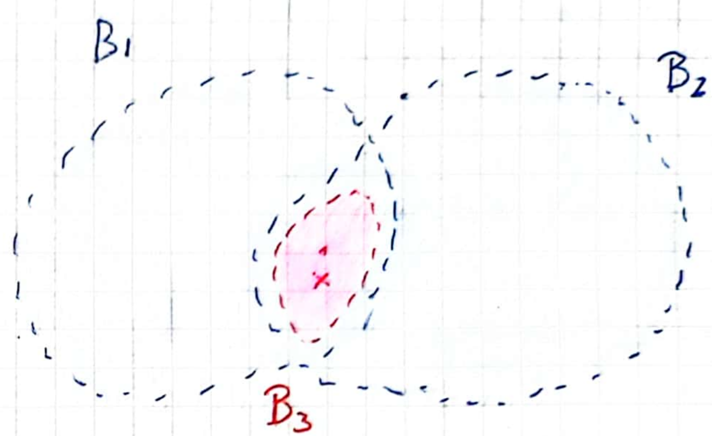
(1) $\forall\, x \in M$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(2) Si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(1)



(2)



Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq M \,/\, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U\}$. Entonces, se puede demostrar que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología, llamada la topología generada por $\mathcal{B}$.

Ejemplo:

(1) Si (M, d) es un espacio métrico, entonces $\mathcal{B} = \{B(x, r) \,/\, x \in M$ y $r > 0\}$ es una base, y $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_d$ (topología métrica).

(2) Dados dos espacios topológicos $(M_1, \mathcal{T}_1)$ y $(M_2, \mathcal{T}_2)$, el conjunto $\mathcal{B} = \{U \times V \,/\, U \in \mathcal{T}_1$ y $V \in \mathcal{T}_2\}$ es una base. A la topología generada por $\mathcal{B}$ se le conoce como topología producto.

El concepto de base también es útil para entender por qué hay espacios topológicos que no son espacios métricos, es decir, la colección de espacios métricos está contenida propiamente dentro de la colección de espacios topológicos.

¿Cuándo es posible definir una métrica en un espacio topológico?

Bajo ciertas condiciones suficientes, es posible responder lo anterior. Estos resultados se conocen como teoremas de metrización, y uno de los más conocidos es el siguiente.

<u>Teorema de metrización de Urysohn</u>: Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico que satisface las siguientes condiciones:

1) $(M, \mathcal{T})$ es Hausdorff, es decir, si $x, y \in M$ con $x \neq y$, entonces existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
2) $(M, \mathcal{T})$ es segundo numerable, es decir, $\mathcal{T}$ tiene una base numerable.
3) $(M, \mathcal{T})$ es regular, es decir, si dado $X \subseteq M$ cerrado e $y \in M - X$, entonces existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $X \subseteq U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Entonces, $(M, \mathcal{T})$ es metrizable, es decir, existe una métrica $d: M \times M \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

(no mencionar)

<u>Ejemplo de espacio topológico no metrizable</u>: Sea R un anillo conmutativo y
$\mathrm{Spec}(R) := \{ P \subseteq R \,/\, P \text{ es un ideal primo de } R \}$
(Espectro primo de R) $\quad$ ↳ $P \neq R$ y $ab \in P \Rightarrow a \in P$ o $b \in P$.

Se equipa $\mathrm{Spec}(R)$ con la topología de Zariski $\mathcal{T}$:
Sea $I \subseteq R$ un ideal. $V_I := \{ P \in \mathrm{Spec}(R) \,/\, I \subseteq P \}$. $\mathcal{T} := \{ V_I \,/\, I \text{ es ideal de } R \}$.
$(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{T})$ <u>no</u> es metrizable. (colección de cerrados)

Ejemplo de espacio metrizable: Sobre cualquier conjunto M con $\text{Card}(M) > 1$ es posible definir dos topologías triviales, a saber

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(M) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$$

(topología discreta) (topología indiscreta)

· $(M, \mathcal{P}(M))$ es metrizable: Considere la métrica discreta $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$.

Sea $U \subseteq M$ y $x \in U$ $(U \neq \emptyset)$. Notamos que $B_d(x, 1) = \{x\} \subseteq U$. Entonces, U es abierto en la topología métrica inducida por d, es decir, $U \in \mathcal{T}_d$. Así, $\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{P}(M)$, por lo cual $(M, \mathcal{P}(M))$ es metrizable.

· $(M, \{\emptyset, M\})$ <u>no</u> es metrizable: Sean $x, y \in M$, $x \neq y$ (tengo en cuenta que $\text{Card}(M) > 1$). Supongamos que existe una métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}_d = \{\emptyset, M\}$. Sea $r = \frac{1}{2} d(x,y)$. Note que $B_d(x, r) \cap B_d(y, r) = \emptyset$. Por otro lado, como $B_d(x, r), B_d(y, r) \in \mathcal{T}_d = \{\emptyset, M\}$, se tiene que $B_d(x, r) = M$ y $B_d(y, r) = M$, obteniendo así una contradicción.

$\therefore (M, \{\emptyset, M\})$ no es metrizable.

→ Llegan al menos hasta aquí

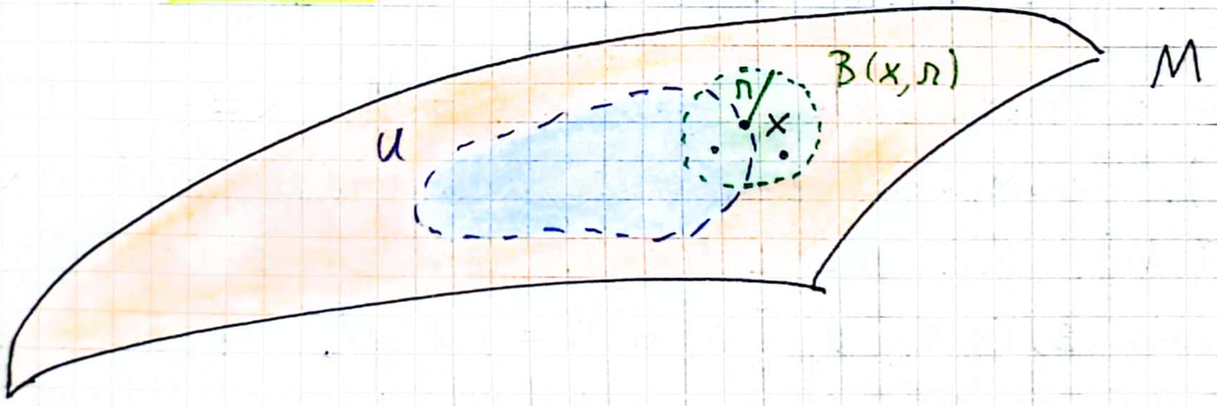
Sigamos con el estudio de propiedades en topologías métricas.

Dado un espacio métrico (M,d), sabemos que todo conjunto $U \subseteq M$ tiene asociado su conjunto $\mathring{U}$ de puntos interiores. El siguiente resultado es inmediato de la definición de $\mathring{U}$ y de $\mathcal{T}_d$.

<u>Proposición</u>: $\mathring{U} \in \mathcal{T}_d$, $\forall U \subseteq M$, y $\mathring{U} \subseteq U$. Además, $\mathring{U}$ es el abierto más grande contenido en U.

Existen otros conjuntos especiales asociados a U.

<u>Definición</u>: Sea (M,d) un espacio métrico y $U \subseteq M$. Un punto $x \in M$ es un **punto de frontera** de U si $\forall r > 0$ se tiene que $B(x,r) \cap U \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap (M-U) \neq \emptyset$. Denotaremos por ∂U al conjunto de todos los puntos de frontera de U. Llamaremos a ∂U la **frontera** de U.



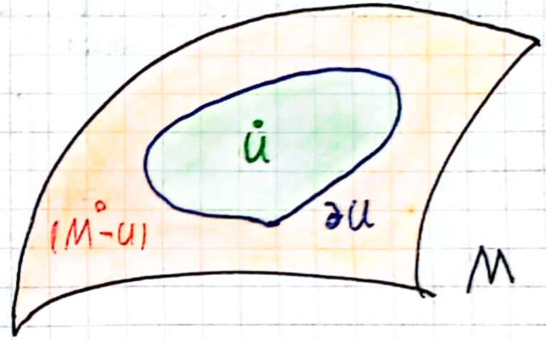
<u>Proposición</u>: $M = \mathring{U} \cup \partial U \cup \overset{\circ}{(M-U)}$, $\mathring{U} \cap \partial U = \emptyset$, $\partial U \cap \overset{\circ}{(M-U)} = \emptyset$ y $\mathring{U} \cap \overset{\circ}{(M-U)} = \emptyset$.

• <u>Demostración</u>: Sea $x \in M$. Si $x \in U$, entonces $x \in \mathring{U}$ o $x \in \partial U$. Supongamos ahora que $x \notin U$, es decir, $x \in M-U$. Si $x \notin \overset{\circ}{(M-U)}$, entonces $\forall r > 0$

se tiene que $B(x,r) \not\subseteq M-U$. Luego, como $x \in M-U$, se tiene que $B(x,r) \cap (M-U) \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap U \neq \emptyset$, es decir, $x \in \partial U$. Por lo tanto, $M = \mathring{U} \cup \partial U \cup (M-\mathring{U})$

Note que $U \cap (M-U) = \emptyset \Rightarrow \mathring{U} \cap (M-\mathring{U}) = \emptyset$. Además, es claro a partir de las definiciones que $\mathring{U} \cap \partial U = \emptyset$ y $\partial U \cap (M-\mathring{U}) = \emptyset$.

$\therefore$ $M = \mathring{U} \cup \partial U \cup (M-\mathring{U})$ es una unión disjunta.

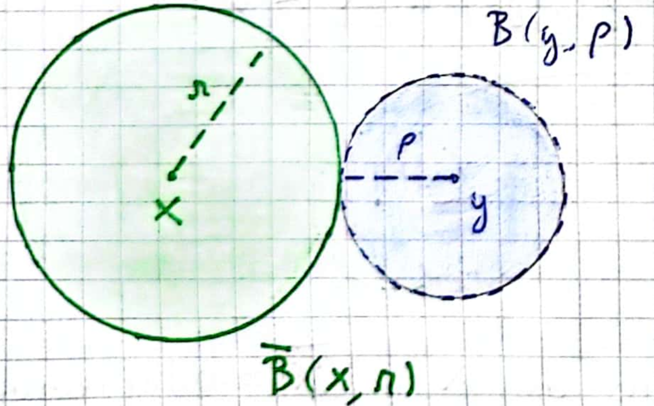


<u>Ejemplos:</u>

(1) $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \mathring{[a,b)} = (a,b)$
$\partial[a,b) = \{a,b\}$. (com la topología usual)

(2) Para $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ com la métrica usual, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ y $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(3) Dado um espacio métrico (M,d) y $x \in M$ y $r > 0$, entonces $\overline{B}(x,r)$ es um conjunto cerrado. Em efecto, veamos que $M - \overline{B}(x,r)$ es abierto. Sea $y \in M - \overline{B}(x,r)$ y $\rho = d(y,x) - r$. Veamos que $B(y,\rho) \subseteq M - \overline{B}(x,r)$.



Sea $z \in B(y,\rho)$. Entonces, por la desigualdad triangular, tenemos:

$$d(z,x) + d(z,y) \geq d(x,y) = \rho + r$$
$$d(z,x) \geq \rho + r - d(z,y) > \rho + r - \rho = r$$
$$d(z,x) > r.$$

$\therefore$ $z \notin \overline{B}(x,r)$.

(4) Hay casos en los cuales $\overline{B}(x,r)$ es además abierto, como por ejemplo cuando d es la métrica discreta.

(5) La intersección arbitraria de abiertos puede no ser abierto, y la unión arbitraria de cerrados puede no ser cerrado. Por ejemplo, sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ (cerrado) y

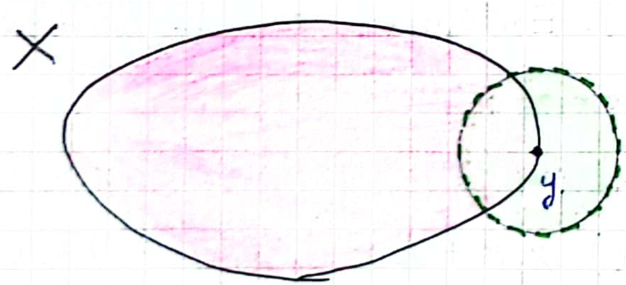
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1].$$

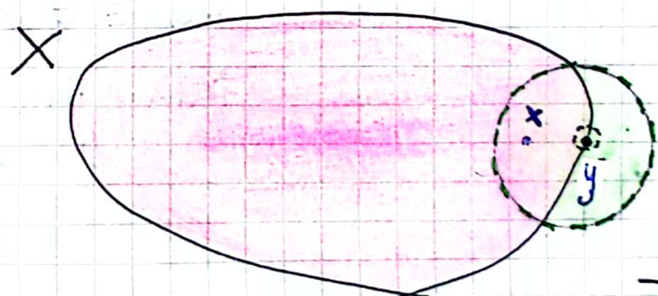
Así como usamos la noción de punto interior para caracterizar los abiertos en espacios métricos, podemos considerar puntos especiales para caracterizar los cerrados.

<u>Definición</u>: Sea (M,d) un espacio métrico y $X \subseteq M$. Se dice que $y \in M$ es:

(1) un punto de adherencia de X si $d(y, X) = 0$

(2) un punto de acumulación de X si $\forall r > 0$, $(B(y,r) - \{y\}) \cap X \neq \emptyset$





Denotaremos por $\overline{X}$ al conjunto de puntos de adherencia de X.

Denotaremos por X' al conjunto de puntos de acumulación de X.

$\overline{X}$ = adherencia o clausura de X.

X' = derivado de X