Práctico 2 - Transformaciones de Möbius

Sean a, b, c, d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. Definimos una transformación de Möebius como una función de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & si \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \\ \frac{a}{c} & si \quad z = \infty \\ \infty & si \quad z = \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

$$ad - bc = ad - ab$$
$$= a(d-b) \neq 0$$
$$\Rightarrow a \neq 0 \text{ y } d \neq b$$

2. *a*) Hallar la transformación de Möbius tal que: $f(0) = -1$, $f(i) = 0$ y $f(\infty) = 1$ $\rightarrow a = c$
   b) Determine la imagen de los siguiente conjuntos para esta transformación:
   - El eje imaginario.
   - El semiplano derecho.
   - El semiplano izquierdo.
   - El eje real.
   - El semiplano superior.
   - La recta $\{z : Im(z) = 1\}$

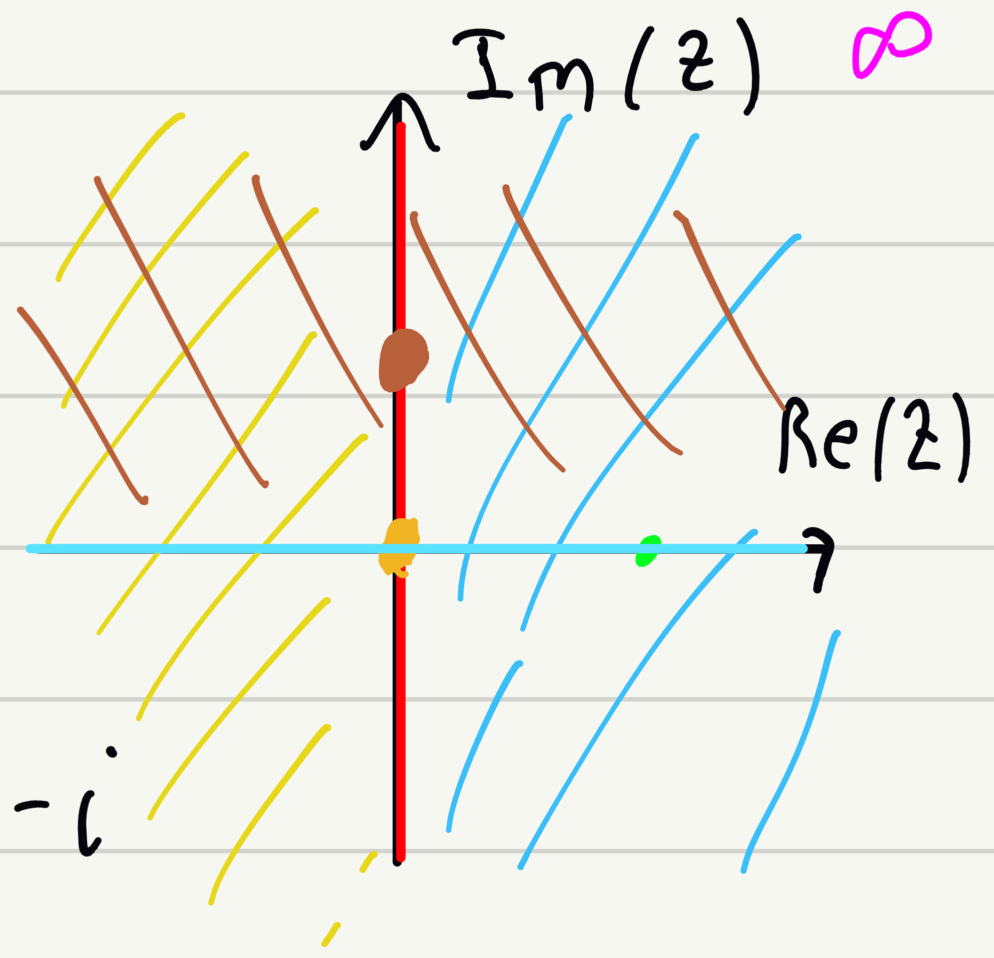
Elijo $a = 1$

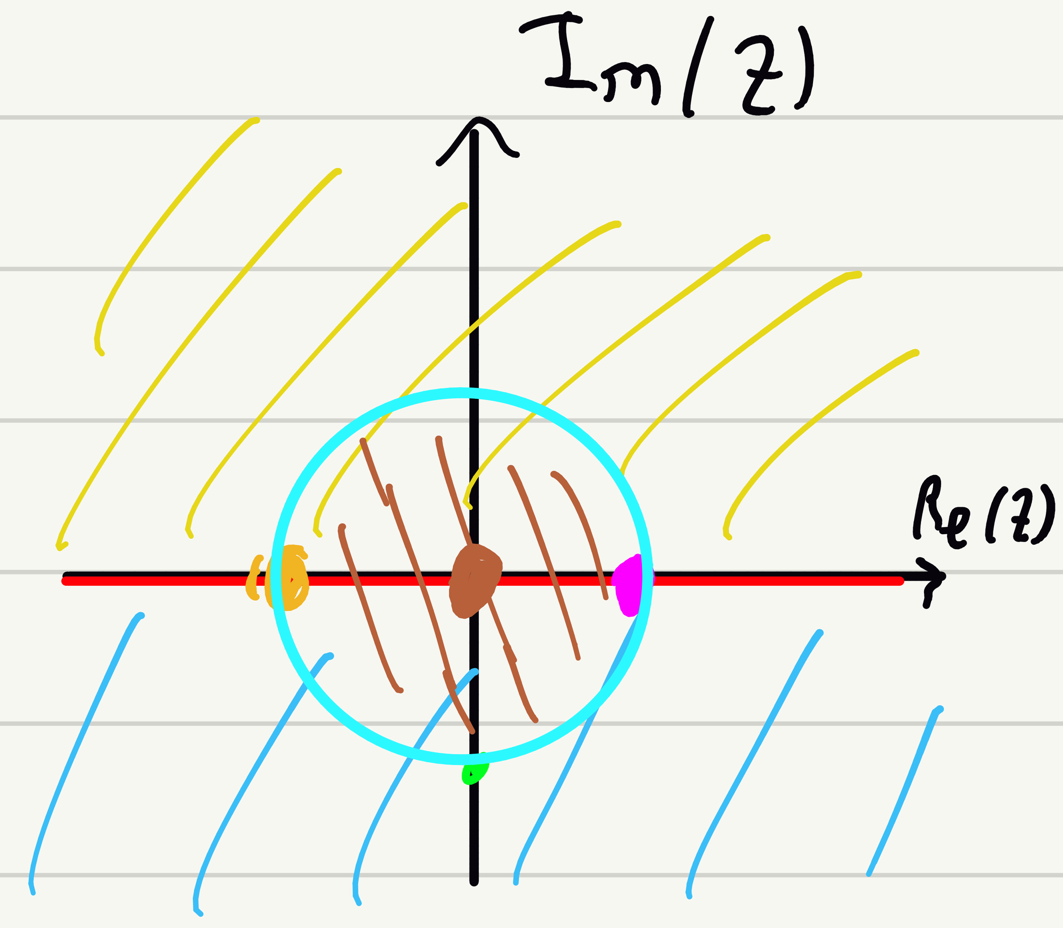
$$f(z) = \frac{z+b}{z+d} \; ; \; f(0) = \frac{b}{d} = -1 \Rightarrow d = -b$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z+b}{z-b} \; ; \; f(i) = 0 \Rightarrow b = -i$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$f(1) = \frac{1-i}{1+i} = e^{-i\pi/2} = -i$$





5. Sea T una transformación de Möbius diferente de la identidad. Probar que:

   a) $T(0) = 0$, $T(\infty) = \infty \Leftrightarrow$ ~~$T(z) = az$~~. $\exists a \in \mathbb{C},\; T(z) = az$

$(\Rightarrow)$

$$T(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \qquad ad - bc = 0$$

$$T(\infty) = a/c = \infty \Rightarrow c = 0$$

$$a = \rho e^{i\theta}$$

$$T(z) = \frac{az}{d} = \left(\frac{a}{d}\right) z$$

$(\Leftarrow)$ Trivial

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

$$= \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

b) $T(\infty) = \infty$ y es el único punto fijo $\Leftrightarrow$ T es una traslación.

$T(\infty) = a/c = \infty \Rightarrow c = 0$

$ad - bc = ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \neq d \Rightarrow d = 1$

$T(z) = \dfrac{az + b}{d}$

$T(z) = az + b = z \Leftrightarrow (a-1)z = -b \Rightarrow a = 1$

Como $T \neq id \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow T(z) = z + b$

Definición 7. Dos puntos son inversos con respecto a un círculo dado si:
i) Los puntos están en un misma semirrecta que pasa por el centro de la circunferencia.
ii) El producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio del círculo.

Ejercicio 6. 1. *Probar que z_1 y z_2 son puntos inversos con respecto al círculo $|z - a| = R$ si, y solo si,*

$$(z_1 - a)\overline{(z_2 - a)} = R^2$$

Observar que cuando $z_1 \to a$ entonces $z_2 \to \infty$. $\to$ En particular a e ∞ son inversos

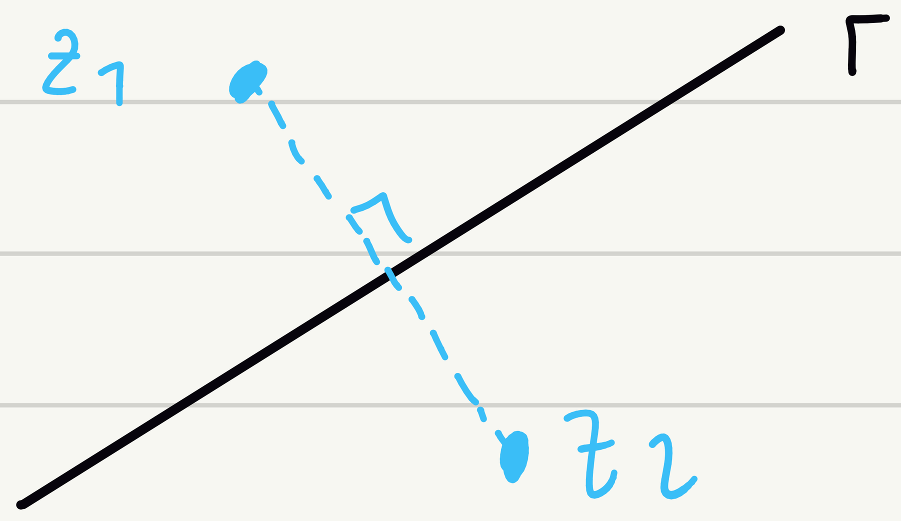
2. *Como ya vimos la ecuación general del círculo se puede escribir en la forma*

$$(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0. \tag{7}$$

Si z_1 y z_2 están relacionadas por la ecuación:

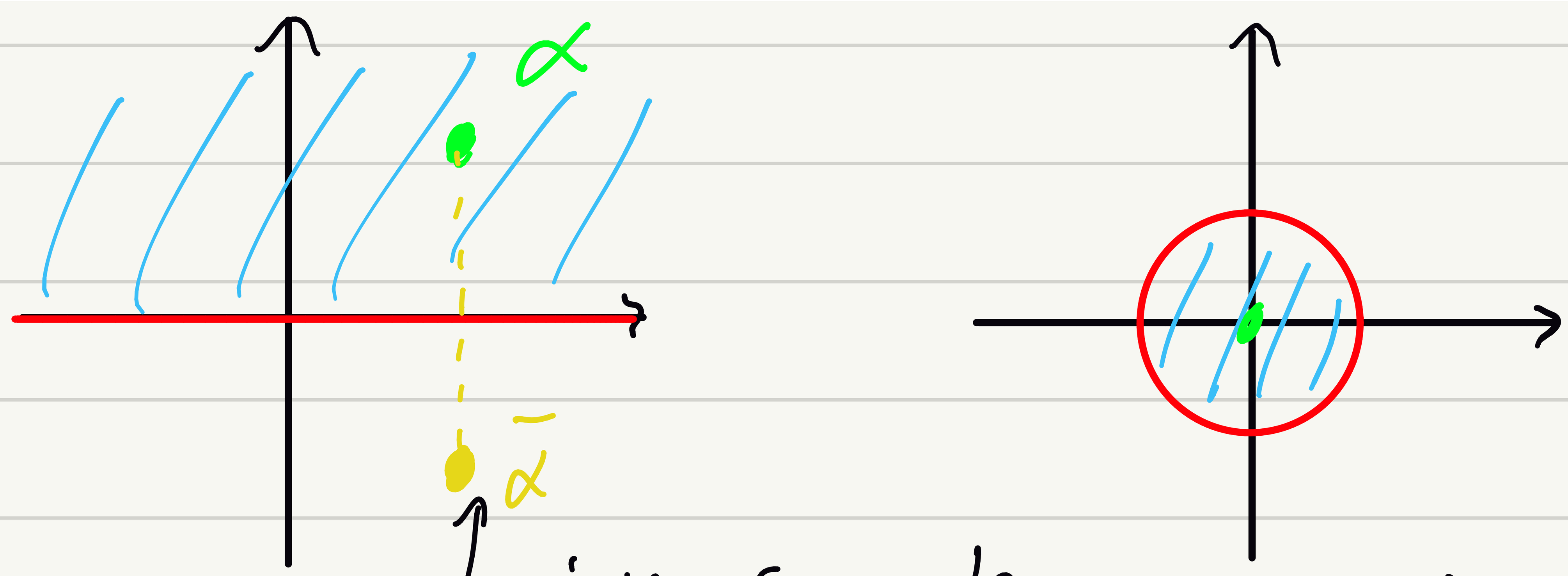
$$(A + \overline{A})z_1\overline{z_2} + \overline{B}z_1 + B\overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$$

Probar que para $A \neq 0$, z_1 y z_2 son puntos inversos del círculo (7). Si $A = 0$, la expresión $\overline{B}z_1 + B\overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$, determina que $dist(z_1, r) = dist(z_2, r)$, siendo $r = \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0$.



3. *Dado cualquier círculo (recta) y un par de puntos z_1 y z_2 que son puntos inversos, probar que la transformación bilineal $\varphi = (az + b)/(cz + d)$ transforma los puntos inversos z_1 y z_2 en puntos inversos del círculo (recta) imagen.*

a) Probar que las tranformaciones de Möbius que llevan el semiplano superior en el disco unidad son de la forma $T(z) = e^{i\beta}\dfrac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$.



$T(\alpha) = 0$, $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$

inverso de α resp. del eje real

$T(\alpha) = 0$ y $T(\overline{\alpha})$ tienen que ser inversos respecto de $T(\mathbb{R}) = S^1 = \partial B(0,1)$

$\Rightarrow T(\overline{\alpha}) = \infty$

$T(\infty) = \dfrac{a}{c} \in S^1 \Rightarrow c \neq 0 \to$ Elijo $c = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{a}{c}\right| = 1$

$= |a| = 1 \Rightarrow a = e^{i\beta}$

$$T(z) = \frac{e^{i\beta} z + b}{z + d} = e^{i\beta} \frac{z + b'}{z + d} = e^{i\beta} \frac{z - \alpha}{z + d}$$

$T(\alpha) = 0$

$$= e^{i\beta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

$T(\bar{\alpha}) = \infty$

4. Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Mobius tal que

$$T(z) = \frac{2z - i}{-iz - 2}$$

a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Probar que $T(D) = D$.

b) Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las rectas por el origen. Probar que existe un único elemento r_0 de $\mathcal{F}$ tal que $T(r_0)$ es una recta.

c) Hallar explícitamente la recta $T(r_0)$.

$T(z) = \infty \iff -iz - 2 = 0 \iff iz = -2 \iff$

$z = 2i \in r_0 \iff r_0 = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$