Práctico 3

espacios topológicos y topologías métricas

1. Sea M un conjunto. Denotaremos por $\mathcal{P}(M)$ al conjunto de partes de M, es decir, $\mathcal{P}(M)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de M.

   (a) Si $\{\tau_i \ / \ i \in I\}$ es una familia de topologías sobre M, demostrar que
   $$\tau := \bigcap_{i\in I} \tau_i$$
   es una topología sobre M.

   (b) Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(M)$ tal que $\emptyset, M \in \mathcal{S}$. Sea $\tau_{\mathcal{S}}$ la topología generada por $\mathcal{S}$, es decir, $\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(M)$ es la menor topología sobre M que contiene a $\mathcal{S}$. Demuestre que $\tau_{\mathcal{S}}$ está formada por uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

2. Considere $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto numerable, demuestre que $A^\circ = \emptyset$.

3. Dado un espacio métrico (M,d) y $X \subseteq M$. Denotamos por X' al conjunto derivado de X, es decir, al conjunto de todos los puntos de M que son puntos de acumulación de X.

   (a) Demuestre que si X es finito, entonces $X' = \emptyset$.

   (b) Demuestre que X' es cerrado en (M,d).

4. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subcojuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, no vacíos, y disjuntos dos a dos. Demuestre que $\mathcal{C}$ es numerable (es decir, la cantidad de elementos de $\mathcal{C}$ coincide con la cantidad de elementos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$).

   Sugerencia: Puede ser de utilidad el hecho de que todo abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ contiene al menos un punto cuyas coordenadas son todas racionales.

5. $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ el conjunto de funciones acotadas $f\colon X \to \mathbb{R}$, equipado con la métrica cuadrada o del supremo $d_\infty\colon \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
   $$d_\infty(f,g) \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

   (a) Si X un conjunto no numerable, demuestre que el subconjunto de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ formado por aquellas funciones que son inyectivas tiene interior vacío en $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.

   (b) Para $X = \mathbb{R}$, sea $F \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el subconjunto formado por todas aquellas funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son discontinuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$. Demuestre que F no es abierto en $(\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \tau_{d_\infty})$.

   (c) Dado un subconjunto $S \subseteq X$, demuestre que
   $$Z_S = \{f\colon X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada y } f(S) = \{0\}\}$$
   es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.

6. Sea $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, y considere las normas $\|-\|_1, \|-\|_\infty\colon \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dadas por
   $$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad \text{y} \qquad \|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}$$
   para toda $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

(a) Demuestre que $d_{\|-\|_1}$ y $d_{\|-\|_\infty}$ inducen topologías métricas diferentes sobre $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

(b) Demuestre que el subconjunto

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \;/\; \int_a^b f(x)\, dx = 0 \right\}$$

es un subespacio vectorial cerrado en $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), d_{\|-\|_1})$ y en $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), d_{\|-\|_\infty})$.

7. Sea M un conjunto equipado con dos métricas $d, d' \colon M \times M \to \mathbb{R}$. Considere las topologías τ_d y $\tau_{d'}$ inducidas por d y d', respectivamente. Demuestre que d es más fina que d' (es decir, $\tau_d \supseteq \tau_{d'}$) si, y solamente si, para todo $x \in M$ y $r > 0$, existe $\rho > 0$ tal que $B_d(x,\rho) \subseteq B_{d'}(x,r)$.

8. Dado cualquier subconjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ se considera con la métrica euclídea, demuestre que existe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\partial X = F$.