Ejercicio 3. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 3$

$\underbrace{a_{n+1}}_{7} = \underbrace{\overset{6}{n}} + \underbrace{\overset{a_6}{a_n}}_{\text{el resto}}$

la última persona saluda a_n

$a_3 = a_{2+1} = 2 + a_2 = 2+1 = 3$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(\overbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots}^{\frac{1}{1-x}})^{10}$.

(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.

(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \leq r \leq n+2$, $r \in \mathbb{N}$.

(a) $(1 + x + x^2 + \dots)^{10}$ $\qquad (1, 1, 1, 1, \dots)$

$$\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{= \frac{1}{1-x}}\Big)^{10} = (1-x)^{-10} = \sum_{n=0}^{\infty} CR^{10}_n x^{n}$$

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n.$$

El coeficiente de x^8 es CR^{10}_8 ($n=8$ en la fórmula)

(b) $(1 + x + x^2 + \dots)^n$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} CR^n_k x^k$$

Queremos $k=8$

El coeficiente de x^8 es CR^n_8.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$

(c) $\underline{(1+x+x^2)}\,\underline{(1+x)^n} = \underline{(1+x+x^2)}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k\right)$

F. Binomio

$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{k+2}$

$k=8 \qquad k=7 \qquad k=6$

Queremos el coef de x^8

El coeficiente de x^8 es $C_8^n + C_7^n + C_6^n$.

x^r es $C_r^n + C_{r-1}^n + C_{r-2}^n$

Ejercicio 7. Verifique que $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

$\sum a_n^1 x^n$ $\qquad a_n^1$ = formas de obtener n como tirada de un dado

$a_1^1 = 1 \quad a_2^1 = 1 \quad a_3^1 = 1 \quad a_4^1 = 1 \quad a_5^1 = 1 \quad a_6^1 = 1$

$a_0 = 0 \quad a_n^1 = 0 \quad \forall n > 6$

$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \longrightarrow$ generatriz asociada a a_n^1: formas de obtener n en una sola tirada

$a_1^2 = 0 \qquad a_2^2 = 1 \qquad a_3^2 = 2 + \ldots$

$\underbrace{(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}_{\text{tirada 1}}\underbrace{(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}_{\text{tirada 2}}$

Coef. de x^1: 0

x^2: 1

x^3: 2

$$F(x) = \left(\sum_{a\in A} x^a\right)\left(\sum_{b\in B} x^b\right)\left(\cancel{\sum_{c\in C} x^c}\right)$$

Queremos contar la cantidad de sols. de $a+b=n$ con $1\leq a\leq 6$ y $1\leq b\leq 6$. Es decir $A=B=\{1,\ldots,6\}$

$a\in A$, $b\in B$ y $c\in C$ tales que $a+b+\cancel{c}=n$ obtendremos un sumando x^n. Esto quiere decir que el coeficiente de x^n en el producto $F(x)$ es exactamente el número de soluciones en los naturales de la ecuación $x_1+x_2+\cancel{x_3}=n$ con restricciones $x_1\in A, x_2\in B, \cancel{x_3\in C}$.

En gral: si queremos el polinomio cuyo coef. es a_n^k: formas de obtener n como suma de exactamente $\underline{k}$ tiradas

hacemos el producto
$$(x^1+x^2+\ldots+x^6)^k.$$

Queremos a_n: formas de obtener n como suma de tirados de dados.

a_n = formas de obtener n con una tirada +	$(x^1+\ldots+x^6)$ generatriz 1 tirada
formas de obtener n con dos tirada +	$(x^1+\ldots+x^6)^2$ 2 tiradas
formas de obtener n con tres tirada +	$(x^1+\ldots+x^6)^3$ 3 tiradas
$\vdots$	
formas de obtener n con k tirades	$(x^1+\ldots+x^6)^k$ k tir.
$\vdots$	

la generatriz es $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x^1+\underbrace{x^2+\ldots+}_{y}x^6)^k$ ← el coef. de x^n da la forma de obtener n como tiradas de dados.

C.V. $y=x^1+\ldots+x^6$

$$\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{1}{1-y}$$

$$=\frac{1}{1-(x^1+x^2+\ldots+x^6)}$$

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$* \begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n & \forall n \geq 1 \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Queremos transformar $*$ en un sistema que involucra $A(x)$ y $B(x)$.

$$\begin{cases} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{A(x)-a_0} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n}_{**\, xA(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n}_{B(x)-b_0} \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1}}_{B(x)-b_0-b_1x} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}}_{x(B(x)-b_0)} - 3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+1}}_{x^2A(x)} \end{cases}$$

nos queda

$$\begin{cases} A(x) = -xA(x) - (B(x)-2) \\ B(x) - 2 - x = x(B(x)-2) - 3x^2 A(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Veamos } ** \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = x(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots) = xA(x)}$$

El sistema nos quedó:

$$\begin{cases} (1+x)A(x) + B(x) = 2 & (1) \\ 3x^2 A(x) + (1-x)B(x) = 2-x & (2) \end{cases}$$

despejamos $B(x)$ y sustituimos en (2)

$$3x^2 A(x) + (1-x)\big(2-(1+x)A(x)\big) = 2-x$$

$$A(x)\left[3x^2 - (1-x)(1+x)\right] + 2(1-x) = 2-x$$

$$A(x)(4x^2-1) = x$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{-x}{1-4x^2}$$

$\rightarrow$ multiplicamos por (-1) arriba y abajo para tener $1-4x^2$ en el denominador.

$$A(x) = \frac{-x}{1-4x^2} = -x\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n+1}$$

$$(0, -4^0, 0, -4^1, 0, -4^2, \dots)$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -4^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ impar} \end{cases} \quad \dots \quad a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 4^k & n = 2k+1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

(b) 010101 ✓ 010010 ✗

$a_1 = 2$ 0 / 1

$a_2 = 3$

01

10

11

$\cancel{00}$

a_{n+1}:

$\underbrace{1\,\underbrace{01010}_{n}}_{a_n}$ + $\underbrace{\underbrace{01}\underbrace{0111}_{\text{largo } n}}_{a_{n-1}}$

· Si la secuencia empieza con 1 puede seguir con cualquier secuencia de largo n sin dos ceros seguidos: hay a_n formas

Si la secuencia empieza con 0 debe seguir con 1

$0\,1\,\underbrace{0\,1\,1\ldots}_{\substack{\text{cualquier secuencia} \\ \text{de largo } n-1 \text{ sin dos} \\ \text{ceros seguidos.}}}$

· hay a_{n-1} formas.

Deducimos la recurrencia $\boxed{a_{n+1} = a_n + a_{n-1}}$

ABCCCC ✓ AABBCC ✗

$B\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{palabra largo } n \text{ sin AA}: a_n}$

Una palabra de largo $n+1$ puede empezar con A, B o C

Si empieza con B puede seguir con A, B o C : $B\underbrace{\qquad}_{n \text{ letras sin AA}}$

a_n palabras

Si empieza con C puede seguir con A, B o C $\underline{\underline{C}}\underbrace{\qquad}_{n \text{ letras sin AA}}$

a_n palabras

Si empieza con A puede seguir con B $AB\underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ letras sin AA}}$ $\underline{a_{n-1} \text{ pal.}}$

C $AC\underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ letras sin AA}}$ $\underline{a_{n-1} \text{ pal.}}$

Regla de la suma

$$\underline{a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}}$$