Práctico 9: Funciones generatrices.

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

$f(x) = 1-x$ tiene inversa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$:

$\sum a_n x^n$

$\sum n a_n x^{n-1}$

$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots)$

$1(1+x+x^2+x^3+\dots) - x(1+x+x^2+x^3+\dots)$

$(1+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\dots) - (\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\dots)$

$=1$.

Def: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\Rightarrow$ su función generatriz asociada es $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$

Ejemplo: $a_n = (-1)^n$ la F.G asociada es $(-1)^0 x^0 + (-1)^1 x^1 + (-1)^2 x^2 + (-1)^3 x^3 + \dots$
$= x^0 - x^1 + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

$(1-x)(1+x+\dots+x^N) = \frac{1-x^{N+1}}{\cancel{(1-x)}} \cancel{(1-x)}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1,1,1,\dots)$ *la respuesta válida es* $\frac{1}{1-x}$ *y no es* $1+x+x^2+x^3+\cdots$, *ni tampoco es* $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

F. Binomio → **a.** $(C_0^6, \overset{a_1}{C_1^6}, \overset{a_2}{C_2^6}, \dots, C_6^6, 0, 0, \dots)$

Derivamos → **b.** $(C_1^6, 2C_2^6, \dots, 6C_6^6, 0, 0, \dots)$

C.V. $y=-x$ → **c.** $(1,-1,1,-1,\dots)$

→ **d.** $(0,0,0,0,1,1,1,1,1,\dots)$

→ **e.** $(0,0,0,3,-3,3,-3,3,\dots)$

f. $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,\dots)$

g. $(1,2,4,8,16,32,64,\dots)$

h. $(0,0,1,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,\dots)$

→ **i.** $(1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,32,0,64,0,128,\dots)$

j. $(0,0,1,b,a,b^2,a^2,b^3,a^3,b^4,a^4,b^5,a^5,b^6,\dots)$

(a) $C_0^6 \cdot 1 + C_1^6 x + C_2^6 x^2 + C_3^6 x^3 + \dots + C_6^6 x^6 + 0 \dots = \sum_{i=0}^{6} C_i^6 x^i$ $\boxed{= (1+x)^6}$

(b) $\sum_{i=1} i \cdot C_i^6 x^{i-1} = 6(1+x)^5$ es la derivada de la generatriz (a)

$$\boxed{a^n b^n = (ab)^n} \qquad a=-1 \quad b=x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(c) $\underset{a_0}{(1},-1,\underset{a_2}{1},-1,1,-1,\ldots)$

$a_n = (-1)^n$

$\underline{\underline{F.6:}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n x^n}_{(-1\cdot x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1+x}$ $\quad y=-x$

(d) $(0,0,0,0,1,1,\ldots)$

$0\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \ldots$

$= x^4 (\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots}) $

$= \dfrac{x^4}{1-x}$

$(0,0,1,1,1,1,\ldots)$

$\dfrac{x^2}{1-x}$

$(1,1,1,\ldots) \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$

$(0,0,1,1,1,) \longrightarrow \dfrac{x^2}{1-x}$

$(1,2,3,4,5,\ldots) \rightsquigarrow$ derivamos.

(e) $(0,0,0,3,-3,3,-3,\ldots)$

$3x^3 - 3x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \ldots$

$3x^3(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$

$\dfrac{3x^3}{1+x}$

(i) $(\underset{a_0}{1},0,\underset{a_2}{2},0,\underset{a_4}{4},0,8,0,16,0,\ldots)$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} (2x^2)^i$ $\quad y = 2x^2$

$= \dfrac{1}{1-y} = \dfrac{1}{1-2x^2}.$

$1\cdot x^0 + 2\cdot x^2 + 4x^4 + 8x^8 + \ldots$

$(x^2)^0 + 2x^2 + 4(x^2)^2 + 8(x^2)^3 + \ldots$

$(x \mapsto x^2)$