Repaso de Teórica:

Vamos a resolver recurrencias del tipo $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = \underset{\text{cte}}{r^n}\, \underset{\text{polinomio}}{h(n)}$

A, B y C ctes.

La sol. general de esa recurrencia es $a_n = b_n + c_n^P$. Donde b_n es sol. de la homogenia $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$ y c_n^P es una sol. particular de la no homogenea.

Para hallar b_n:

Sean r_1 y r_2 raíces de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

- Si $r_1 \neq r_2$: $b_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
- Si $\boxed{r_1 = r_2}$: $b_n = \alpha r_1^n + \beta \cdot n r_1^n$

$\alpha \cdot 1 \quad + \beta \cdot n \cdot 1$

Para hallar c_n^P:

1. Si r es raíz doble de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ — $c_n^P = n^2 \cdot r^n \cdot g(x)$

pol. del mismo grado que arriba

2. Si r es raíz simple de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ — $c_n^P = n \cdot r^n \cdot g(x)$

3. Si r no es raíz de de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ — $c_n^P = r^n \cdot g(x)$

$$a_0 = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^0 + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^0 = 1+1=2$$

Ejercicio 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\underbrace{\frac{1+\sqrt5}{2}}_{r_1})^n + (\underbrace{\frac{1-\sqrt5}{2}}_{r_2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

(a) a_n es sol. de la recurrencia $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$ donde $r_1 = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ y $r_2 = \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$ son las raíces de $p(x) = Ax^2+Bx+C$.

Es decir, buscamos A, B y C coefs. del polinomio (observamos que podemos para $A=1$)

$$p(x) = (x-r_1)(x-r_2)$$
$$= \left(x - \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right)$$
$$= x^2 - x\underbrace{\left(\frac{1+\cancel{\sqrt5}}{2} + \frac{1-\cancel{\sqrt5}}{2}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}_{\frac14(1-5)}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) \\ a^2-b^2}$$

$$\boxed{= x^2 - x - 1}$$

$A=1 \qquad B=-1 \qquad C=-1$

Recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

(b)

Caso base $n=0$: $a_0 = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^0 + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^0 = 1+1=2$ ✓

Hipótesis inductiva: a_m es entero positivo $\forall m \leq k$

Tesis inductiva: a_{k+1} es entero positivo.

Si $a_{k+1} = a_1$: $a_1 = \left(\frac{1+\cancel{\sqrt5}}{\cancel{2}}\right)^1 + \left(\frac{1-\cancel{\sqrt5}}{\cancel{2}}\right)^1 = 1$

Si $k \geq 1$: $a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\substack{\text{H.I.}\downarrow \\ a_k \in \mathbb{Z}^+}}^{>0} + \underbrace{a_{k-1}}_{\substack{\downarrow \text{H.I.} \\ a_{k-1} \in \mathbb{Z}^+}}^{>0} \Rightarrow a_{k+1} \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{c_{n+1} = c_n + r^n \cdot h(n)}$$

Ejercicio 3. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(a) • Sol. Homogenea $\quad c_{n+1} = c_n$:

$a_{n+1} = d \cdot a_n \rightsquigarrow$ sol. gral: $a_n = d^n \cdot A$.

$\overset{\shortparallel}{1}$

La solución es $b_n = 1^n \alpha \quad$ cte

• Sol. particular (de la no homogenea)

Nosotros sabemos resolver recurrencias del tipo

$c_{n+1} = c_n + h(n) \cdot r^n \hookrightarrow$ tenemos 2^{n-1} no 2^n

como nos importa el grado de h no vamos a tener problema si usamos 2^n en vez de 2^{n-1}.

$$c_{n+1} - c_n = \frac{n}{2} \cdot 2^n \quad \text{“}\, n/2$$

$r = 2 \quad$ y $\quad h(n) = \frac{n}{2} \rightarrow$ grado 1

¿$r = 2$ es raíz de $p(x) = (x-1)$?

No $\Rightarrow a_n^p = r^n g(n) \rightarrow$ grado 1

$= 2^n(an + b) \quad a, b$ constantes

• Tenemos que hallar a y b: sabemos que a_n^p cumple la recurrencia

$$a_{n+1}^p - a_n^p = \frac{n}{2} 2^n$$

$$\cancel{2^{n+1}}\,2\,(a(n+1)+b) - \cancel{2^n}(an+b) = \frac{n}{2}\cancel{2^n}$$

$$2an + 2a + 2b - an - b = \frac{n}{2}$$

$$a \cdot n + 2a + b = \frac{n}{2} + 0$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad$ y $\quad 2a + b = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

$$a_n^p = 2^n\left(\frac{1}{2}n - 1\right)$$

La sol. gral de la no homogenea es $c_n = b_n + a_n^p$

$$= \alpha + 2^n\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

- Nos falta hallar α tq $c_0 = 0$: $c_0 = \alpha + 2^0\left(\frac{0}{2} - 1\right)$

$$= \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$c_n = 1 + 2^n\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

(b) $-\frac{1}{2} d_{n+2} + d_{n+1} - \frac{1}{2} d_n = 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

r

- Resolver la homogenea: $\underline{p(x)} = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

$\Rightarrow$ 1 es raiz doble $\Rightarrow$ sol. gral homogenea: $b_n = \alpha + \beta \cdot n$

- Dar una sol. particular: $r=1$ es raiz

$$\Rightarrow a_n^p = n^2 \cdot 1^n \cdot \underset{\text{cte}}{g(n)} = k n^2$$

- Hallar k: $a_n^p = kn^2$ cumple la recurrencia

$$-\frac{1}{2} k(n+2)^2 + k(n+1)^2 - \frac{1}{2} k n^2 = 1$$

$$-k(n^2+4n+4) + 2k(n^2+2n+1) - kn^2 = 2$$

$$k\left(-\cancel{n^2} - \cancel{4n} - 4 + 2\cancel{n^2} + \cancel{4n} + 2 - \cancel{n^2}\right) = 2$$

$$k(-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -1}$$

- La sol. gral de la no hom. es $d_n = \alpha + \beta n - n^2$
- $d_0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$d_{100} = 0$: $\quad d_{100} = \beta 100 - 100^2 = 100(\beta - 100) = 0$

$$\beta = 100$$

$$\boxed{d_n = 100n - n^2}$$

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a_n := a(n)$

Ejercicio 5. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$(*)\ a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

$\to a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 2^{n+2}$ $\forall n \geq 0$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Hallamos α y β:

a_0, a_1 y a_2 cumplen $(*)$

$$1 + \alpha \cdot 5 + \beta \cdot 1 = 2^2$$

a_1, a_2, a_3 cumplen $(*)$

$$17 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 5 = 2^3$$

$$\begin{cases} 5\alpha + \beta = 3 \\ -5\alpha + 25\beta = -45 \end{cases}$$

$-24\beta = 48$

$\beta = -2$

$5\alpha - 2 = 3$

$5\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 1.$

$\alpha = 1 \quad \beta = -2.$

La recurrencia es $\boxed{a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+2}}$

Homogenea: $1 \cdot a_{n+2} + 1 \cdot a_{n+1} - 2a_n = 0$

$p(x) = x^2 + x - 2$

Raíces: $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ -2, 1

Solución general de la homogenea: $\alpha \cdot (-2)^n + \beta$

Particular: $r = 2$ y h es cte.

2 no es raíz de $p(x) \Rightarrow a_n^p = K\, 2^n.$

misma grado que h

Hallamos K: $a_{n+2}^p + a_{n+1}^p - 2a_n^p = 2^{n+2}$

$$K\left(2^{n+2} + \cancel{2^{n+1}} - \cancel{2 \cdot 2^n}\right) = 2^{n+2}$$

$$K\, 2^{n+2} = 2^{n+2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 1}$$

Sol. gral. de la recurrencia no homogenea: $a_n = b_n + a_n^p$

$= \alpha(-2)^n + \beta + 2^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha(-2)^0 + \beta + 2^0 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 1$

$a_1 = 5 \Rightarrow \alpha(-2)^1 + \beta + 2^1 = 5 \Rightarrow -2\alpha + \beta + 2 = 5$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

$3\beta = 3$

$\beta = 1$

$\alpha = -1$

$(-2)^{100} = 2^{100}$

Solución: $a_n = -(-2)^n + 1 + 2^n$

Tenemos que hallar a_{100}: $a_{100} = -(-2)^{100} + 1 + 2^{100}$

$= (-1)(-1)^{100}(2)^{100} + 1 + 2^{100}$

$= (-1)^{101} \cdot 2^{100} + 1 + 2^{100}$

$= \cancel{-2^{100}} + 1 + \cancel{2^{100}}$

$= 1$

$\boxed{a_{100} = 1}$

Ejercicio 6. (Examen Febrero 2009)
Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

(a) a_1: $2 \cdot 1$ jugadores $\qquad a_1 = 1$

a_2: $2 \cdot 2$ jugadores

1 2	3 4
1 3	2 4
1 4	2 3

$a_2 = 3$

$a_2 = C^4_2 / 2$

a_3: $2 \cdot 3$ jugadores

elijo el 2º equipo

$a_3 = \dfrac{C^6_2 \cdot C^4_2 \cdot C^2_2}{3!} = 15$

elijo un equipo

$\underline{E1}$ $\underline{E2}$ $\underline{E3}$

$C^6_2 \cdot C^4_2 \cdot C^2_2$

(b) a_{k+1}: ~~#~~ formas de emparejar $2k+2$ personas.

$$a_{k+1} = \underbrace{(2k+1)}_{\substack{\text{formas de emparejar}\\ \text{a un jugador fijo}\\ \text{(el 1º) con}\\ \text{otro}}} \cdot \underbrace{a_k}_{\substack{\text{formas de}\\ \text{emparejar los}\\ \text{restantes } 2k}}$$

Regla del producto.

(c) Por I.C.

- Paso base $k=1$: $a_1 = 1 = (2\cdot 1 - 1)$ ✓

- Hipótesis inductiva: $a_m = \underbrace{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}\cdot 1$

el producto de todos los impares entre 1 y $2m-1$

- Tesis Inductiva: $a_{m+1} = \left(2(m+1)-1\right)\cdot\left(2(m+1)-3\right) \ldots 3\cdot 1$
$= (2m+1)(2m-1)\ldots 3\cdot 1$

- Prueba de H.I. $\Rightarrow$ T.I.:

$$a_{m+1} \overset{\text{parte b}}{=} (2m+1)\cdot a_m$$
$$\overset{\text{H.I.}}{=} (2m+1)\cdot(2m-1)\ldots 3\cdot 1 \checkmark$$