# Práctico 7: Relaciones de recurrencia.

Vamos a estudiar funciones $a_n = a(n)$ que cumplen que $a_n$ depende de los términos $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Ejemplo: relaciones de recurrencia lineales homogeneas de primer orden: $\boxed{a_n - \underset{\text{cte}}{d}\, a_{n-1} \underset{\text{homogenea}}{=0} \quad \forall n \geq 1}$

- $1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots$

$a_0 = 1, \quad a_1 = 2 = 2 \cdot a_0, \quad a_2 = 4 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 \cdot a_0$

$a_3 = 8 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a_0 \quad \dots$

en gral: $a_n = 2^n a_0$.

**Ejercicio 2.** Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $a_{n+1} - \frac{3}{2} a_n = 0, \quad n \geqslant 0.$

(b) $a_n - n a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$

(c) $n a_n - (n-1) a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$

(d) $a_n / a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, $p$ positivo diferente de 1.

(a) $a_{n+1} - \frac{3}{2} a_n = 0$

$$a_{n+1} = \frac{3}{2} \underset{\frac{3}{2} a_{n-1} \text{ si } n \geq 1}{a_n} = \frac{3}{2}\frac{3}{2} a_{n-1} = \frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2} a_{n-2} = \dots = \overbrace{\frac{3}{2} \cdots \frac{3}{2}}^{n-1} a_1$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2} \cdots \frac{3}{2}\frac{3}{2}}_{n \text{ veces}} a_0$$

podriamos probarlo formalmente con I.C.

Es decir: $\boxed{a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 \quad \forall n \geq 0}$

$a_0$ arbitrario

$a_1 = \frac{3}{2} a_0$

$a_2 = \frac{3}{2} a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot a_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 a_0$

$a_3 = \frac{3}{2} a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 a_0$

$a_4 = \frac{3}{2} a_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 a_0$

$\vdots$

$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_0$

Si cambiamos $\frac{3}{2}$ por $d$ tenemos la sol. general de

$$a_n = d \cdot a_{n-1} \quad :$$

esta es $a_n = d^n \cdot A$ $A$ arbitrario ($A = a_0$).

(b) $a_n = n \cdot a_{n-1}$

$a_0$ arbitrario

$a_1 = 1 \cdot a_0$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 \cdot a_0$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0$

$\vdots$

$a_n = n! a_0$

Afirmación: Sea $A$ fijo (cualquiera) entonces $a_n := n! A$ satisface la recurrencia $a_n = n \cdot a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ con $a_0 = A$:

$a_{n+1} = (n+1)! \, a_0 = (n+1) n! \, a_0 = (n+1) a_n$.

$a_0 = 0! A = A$ ■

Afirmación 2: una sol. de la rec. $a_n = n a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ es de la forma anterior: por I. C.

Por I.C.: $\left(\text{Si se sat. la recurrencia hasta } n \Rightarrow a_n = n! a_0\right)$ $\forall n \geq 0$

$a_0 = 0! a_0$ ✓

$a_1 = 1 \cdot a_0$ ✓ ...

H.I.
Si se satisface la recurrencia $\Rightarrow a_k = k!\,a_0$

T.I. Si se sat. la recurrencia hasta $k+1$ $\Rightarrow a_{k+1} = (k+1)!\,a_0$

H.I. $\Rightarrow$ T.I.

$$a_{k+1} = (k+1)a_k = (k+1)\underbrace{k!\,a_0}_{H.I.} = (k+1)!\,a_0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{O sea que } a_n = n!\,A \text{ es sol. con } a_0 = A \text{ y es la única.}}$

(No vamos a hacer el resto de pruebas formales).

(c) $a_n = \frac{(n-1)}{n} a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

$$= \frac{(\cancel{n-1})}{n}\frac{(n-2)}{(\cancel{n-1})} a_{n-2}$$

la recurrencia es para $n \geq 1$

$$= \frac{(\cancel{n-1})}{n}\frac{(\cancel{n-2})}{(\cancel{n-1})}\frac{(\cancel{n-3})}{(\cancel{n-2})} \cdots \frac{1}{\cancel{2}} a_1 = \frac{1}{n} a_1$$

¿Que pasa si vale $a_n = \frac{(n-1)}{n} a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$?

$$a_n = \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} \cdot a_0 = 0 \quad \forall n \geq 1$$

sol. gral: $\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n} A \quad n \geq 1 \\ a_0 = B \end{array}\right\}$ A y B arbitrarios

$a_0, a_1, a_2 = \frac{1}{2} a_1, \; a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{1}{\cancel{2}} a_1, \; a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{\cancel{3}}{4}\frac{1}{\cancel{3}} a_1$

(d) $a_n = 2 \cdot a_{n-1}^p \quad a_0 = 1 \quad p \neq 1$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2 \cdot a_0^p = 2 \cdot 1^p = 2$

$a_2 = 2 \cdot a_1^p = 2^1 \cdot 2^p = 2^{p+1}$

$a_3 = 2 \cdot a_2^p = 2^1 (2^{p+1})^p = 2^{1+p+p^2}$

$a_4 = 2 \cdot a_3^p = 2^1 (2^{1+p+p^2})^p = 2^{1+p+p^2+p^3}$

$\vdots$

$a_n = 2^{1+p+\dots+p^{n-1}} = 2^{\sum_{i=0}^{n-1} p^i}$

---

Repaso: relaciones de recurrencia lineales homogeneas de orden dos.

$$C_{n+2} a_{n+2} + C_{n+1} a_{n+1} + C_n a_n = 0$$

Buscamos sols. de la forma $a_n = cr^n$ (y vamos a encontrar dos sols. l.i, es decir: no obtenemos una sol. multiplicando cada término de la otra por una constante).

Ej.: Si obtenemos sols. $2^n$ y $3^n$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$: | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | ... |
| $b_0$: | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | ... |

No obtengo una multiplicando la otra.

$a_0 = b_0$ pero $a_1 = 2 = \frac{2}{3} b_1$

$\rightsquigarrow$ Tenemos 2 sols: $2^n$ y $3^n$

Si sumo $2^n$ y $3^n$ es sol, más en gral: todas las sols. serían $A2^n + B3^n$.

Si $a_n = Cr^n$ es sol $\Rightarrow$

$$C_{n+2} \cdot C r^{n+2} + C_{n+1} C r^{n+1} + C_n \cdot C \cdot r^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad C \cdot r^n \left( C_{n+2} r^2 + C_{n+1} r + C_n \right) = 0$$

Entonces queremos encontrar sols de esto: $r_1$ y $r_2$

Hay 2 casos

- $r_1 \neq r_2$: reales $\neq$ complejos conjugados. La sol. general de la recurrencia

$$C_{n+2} a_{n+2} + C_{n+1} a_{n+1} + C_n a_n = 0$$

es $a_n = A r_1^n + B r_2^n \quad \underline{\underline{\forall n \geq 0}}$

- $r_1 = r_2$ reales: La sol. general de la recurrencia

$$C_{n+2} a_{n+2} + C_{n+1} a_{n+1} + C_n a_n = 0$$

es $a_n = A r_1^n + B n r_1^n \quad \underline{\underline{\forall n \geq 0}}$

Ahora si hagamos el ej 1(a)

**Ejercicio 1.** Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $a_0 = 1, a_1 = 3.$

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $b_0 = 5, b_2 = 27.$

(c) $c_{n+2} + 4c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $c_0 = c_1 = 1.$

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad (*)$

Primero hallamos $r_1$ y $r_2$ las raíces de

$$a_{n+2} \cdot r^2 - 5a_{n+1} + 6a_n$$

usando Bhaskara:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

La sol. general de (*) es $a_n = A\,2^n + B\,3^n$. Ahora tenemos que encontrar A y B para que además se cumplan las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \Rightarrow A\,2^0 + B\,3^0 = 1 \Rightarrow A + B = 1 \\ a_1 = 3 \Rightarrow A\,2^1 + B\,3^1 = 3 \Rightarrow 2 \cdot A + 3 \cdot B = 3 \end{cases}$$

$$(2(B-1) + 3B = 3)$$

$$\Rightarrow 5B = 5 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 0$$

Solución: $a_n = 0 \cdot 2^n + 1 \cdot 3^n = 3^n$.

Vamos a chequear para un par de n's esto:

$a_0 = 3^0 = 1$ ✓

$a_1 = 3^1 = 3$ ✓

$a_2 = 3^2 = 9$ ¿Cumple $a_2 = 5a_1 - 6a_0$?

$9 = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1$ ✓

$a_3 = 3^3 = 27$ ¿Cumple $a_3 = 5a_2 - 6a_1$?

¿$27 = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 3$?

$27 = 45 - 18$ ✓

De forma similar podemos resolver (b) y (c).

(b) Dos raíces reales iguales: $r_1 = r_2 = 3 \Rightarrow$ la sol. general de $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0$ es $b_n = A\cdot 3^n + Bn3^n$.

Hallemos A y B para que $b_0 = 5$ $b_2 = 27$

$$\begin{cases} b_0 = 5 \Rightarrow A\cdot 3^0 + B\cdot 0\cdot 3^0 = 5 \Rightarrow A = 5 \\ b_2 = 27 \Rightarrow A\cdot 3^2 + B\cdot 2\cdot 3^2 = 27 \Rightarrow 45 + 18B = 27 \\ \qquad \Rightarrow B = -1. \end{cases}$$

Solución: $b_n = 5 3^n - n\cdot 3^n$.

(b) En este caso hay dos raíces complejas conjugadas $r_1 = 2i$ $r_2 = -2i$

$$\Rightarrow c_n = A(2i)^n + B(-2i)^n$$

Tenemos encontrar A y B tales que $c_0 = c_1 = 1 \ldots$