Queremos estudiar si podemos repartir 21 pociones en 14 días de forma tal que ninguna suma consecutiva de 6.

Es decir, si llamamos x_i a las pociones consumidas en el día i, queremos que $x_1 + \dots + x_{14} = 21$ con $x_i \geq 1 \; \forall i$ y que ninguna suma $x_i + x_{i+1} + \dots + x_j = 6$.

<u>Ejemplo</u>: Una forma de repartir 21 pociones en 14 días es $(1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 1)$ (y podemos observar que hay días que suman 6)

Observemos lo siguiente: si en lugar de considerar los x_i consideramos las sumas acumuladas

$$(0, x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \dots, x_1+\dots+x_{14}=21)$$

tendremos que hay días con cant. de pociones que suman 6 sii hay dos de estas sumas cuya diferencia es 6.

<u>Siguiendo con el ejemplo</u>: las sumas acumuladas quedan $(0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 19, 20, 21)$

y vemos que tenemos $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6$,

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 - (x_1+x_2+x_3) = 6$, es decir $x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 = 6$ ...

Entonces nuestro problema es equivalente a estudiar la existencia de uplas $(0, y_1, \ldots, y_{14}=21)$ donde todos los y_i son distintos (porque se agrega al menos una poción por día). tales que ninguna resta dé 6.

$\Rightarrow$ Usemos el Ppio. del Palomar para probar que no existen soluciones con esas condiciones.

Forma 1: podemos considerar los siguientes palomares:

$$P_1 = \{1, 7, 13, 19\}$$
$$P_2 = \{2, 8, 14, 20\}$$
$$P_3 = \{3, 9, 15, 21\}$$
$$P_4 = \{4, 10, 16\}$$
$$P_5 = \{5, 11, 17\}$$
$$P_6 = \{6, 12, 18, 0\}$$

observando que si hay 3 y_i en un mismo palomar su resta da 6 (y por lo tanto no cumple las condiciones que nos piden).

Si distribuimos 15 elementos $0, y_1, y_2, \ldots, y_{14}=21$ (palomas) en los palomares $\Rightarrow$ hay un palomar con al menos $\left\lceil \frac{15}{6} \right\rceil = 3$ palomas, por lo tanto no existen sols. a nuestro problema.

Forma 2: Si ahora tomamos como palomares a los pares de enteros entre 0 y 21 cuya resta da 6 tenemos:

$\{0,6\}$ $\{1,7\}$ $\{2,8\}$ $\{3,9\}$ $\{4,10\}$
$\{5,11\}$ $\cancel{\{6,12\}}$ $\{7,13\}$ $\{8,14\}$ $\cancel{\{9,15\}}$
$\{10,16\}$ $\{11,17\}$ $\{12,18\}$ $\{13,19\}$ $\{14,20\}$
$\{15,21\}$

Si algún y_i es 6 o 15 $\Rightarrow$ algunos elementos suman 6, quitemos entonces los palomares que contienen al 6 o al 15 y a elementos repetidos: quitamos el $\{9,15\}$ y el $\{6,12\}$.
Nos quedan 15 enteros $0, y_1, \dots, y_{14}=21$ a repartir en 14 palomares, por el Ppio. del palomar hay algún palomar con 2 elementos: esto quiere decir que hay dos y_i cuya resta da 6.