Principio del Palomar.

Si tenemos n palomas y m palomares, $n>m$. Entonces hay al menos un palomar con más de una paloma.

¿Qué podemos decir si tenemos 20 palomas y 9 nidos? En alguno hay al menos 3 palomas.

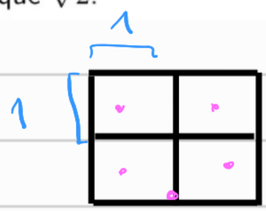
Versión más fuerte:

Esto es el ejercicio 5.

Si tenemos n palomas y m nidos, $n>m$. Entonces un nido tiene al menos $\lceil n/m \rceil$ palomas.

"techo" es el menor entero y / $y \geq \frac{n}{m}$

Ejercicio 4. Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.



Obs.: Si dos puntos están en el mismo cuadrante, entonces su distancia es menor o igual a $\sqrt{2}$. Por lo tanto nos alcanza con probar que hay dos puntos en un mismo cuadrante.

Nidos: cuadrantes (4)
Palomas: puntos (5)

Ppio. del Palomar: hay un cuadrante con 2 puntos.

Ejercicio 1. Probar que en el mundo hay al menos tres personas que nacieron al mismo tiempo (mismo año, mes, día, hora, minuto y segundo, tomando hora universal de Greenwich).

Datos que necesitamos.

- Hay 8.000 millones de personas en el mundo.
- La persona más longeva tiene menos de 120 años.

Palomas: personas

Nidos: segundos de los últimos 120 años.

$120 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 3.794.688.000$

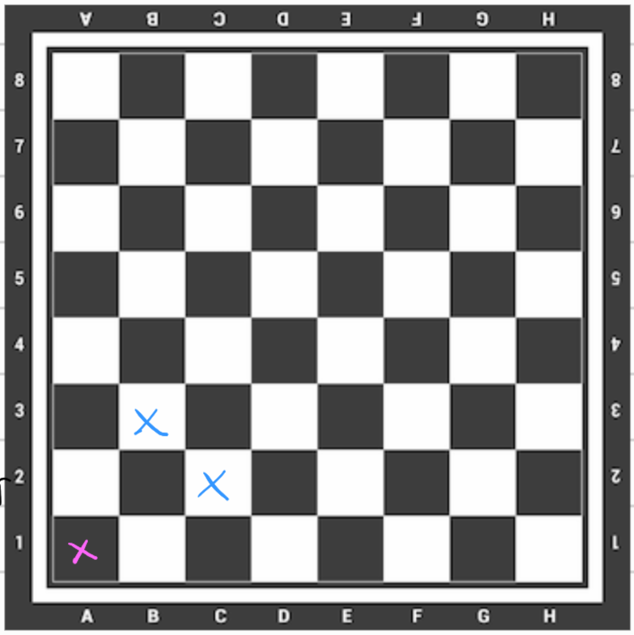
solo necesitamos < 4.000 millones.

Principio del Palomar (versión más gral.): va a haber al menos un segundo en el que nacieron $\left\lceil \frac{8.000.000.000}{3.794.688.000} \right\rceil = 3$ personas.

Ejercicio 7. Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

Recordar que si un caballo está en una casilla blanca (negra), salta hacia una casilla negra (blanca). Verificarlo en un tablero.

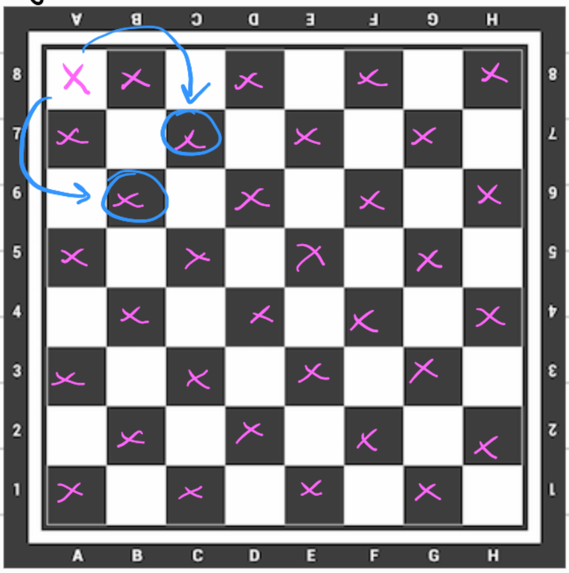
X pos. a la que puede saltar un caballo en X



Obs.: Un caballo en posición negra (blanca) salta sólo a posición blanca (resp. negra), es decir, si ponemos 32 caballos en las 32 casillas negras (o blancas) estos no se invaden o amenazan.

¿Qué pasa si ponemos 33 caballos en el tablero?

Si tenemos la distribución de 32 caballos en 32 casillas negras y agregamos otro caballo, entonces este caballo amenaza a alguno en pos. blanca y por lo tanto esta distribución no es óptima.
Pero no es un argumento suficiente, podríamos tener una distribución óptima con 33 caballos donde menos de 32 sean negros o blancos.

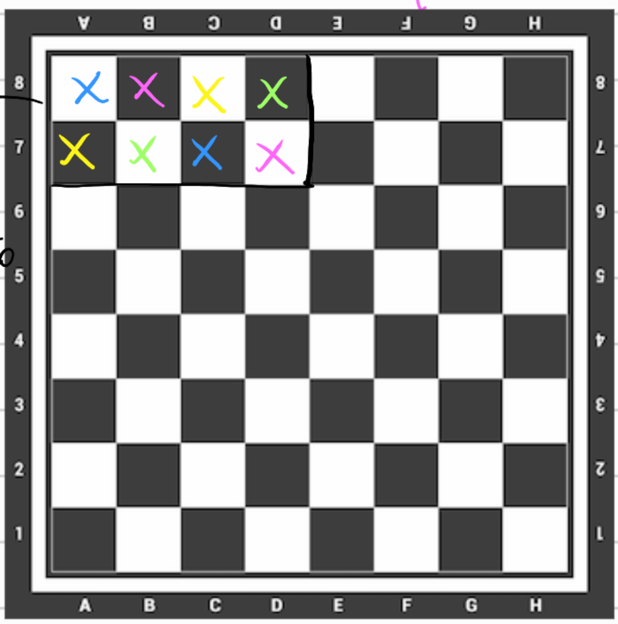


que
e

Veamos que esto no puede pasar, es decir, si tenemos 33 caballos => hay 2 en pos. a saltar hacía el otro.

Idea: Queremos usar Palomar, las palomas son los 33 caballos y necesitamos 32 nidos de forma tal que un mismo nido NO puedan colocarse dos caballos sin que se amenacen.

Podemos repetir este emparejamiento



Emparejamos las casillas de forma tal que si hay 2 caballos en casillas emparejadas estos se pueden invadir.
(Repetimos en los 7 subtableros 2×4 restantes)

Tenemos: 32 nidos (pares de casillas del mismo color)

33 palomas (caballos)

Entonces (Ppio. Palomar) hay un par de casillas con 2 caballos, estos se pueden invadir y por lo tanto no hay una distribución de 33 caballos como nos piden. 32 es la cantidad óptima.

Ejercicio 6. Consideremos un tablero rectangular compuesto por 141 filas y 8 columnas, definiendo en total 141×8 celdas. Cada celda se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro celdas pintadas de negro. Demostrar que hay al menos 3 filas con igual secuencia de colores.

Palomas: filas (141)

Nidos: secuencias de colores.

Dar una secuencia de colores es lo mismo que dar una permutación de la palabra B B B B N N N N.

Hay $\dfrac{8!}{4!\,4!} = \dfrac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}^{2}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 70$ palabras distintas.

Por el Ppio. del Palomar hay $\left\lceil 141/70 \right\rceil = 3$ filas con la misma secuencia de colores.

Ejercicio 3. Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

Obs: Si Juan es amigo de Pedro $\Rightarrow$ Pedro es amigo de Juan.

Palomas: personas $(n \geq 2)$
Nidos: ¿cantidad de amigos? va de 0 a $n-1$ $\Rightarrow$ no podemos aplicar Palomar directamente.

Un argumento posible...
Si no hay 2 personas con la misma cantidad de amigos $\Rightarrow$ cada persona tiene un nº de amigos diferente. Hay n posibles nº de amigos y n personas, entonces
- una persona tiene 0 amigos
- una persona tiene $n-1$ amigos

Esto es absurdo.

Usemos Ppio. del Palomar.
No podemos aplicarlo directamente pero si separando en casos.

1) Todos tienen un amigo.
Ahora hay n palomas y $n-1$ amigos (las cant. van de 1 a $n-1$). ✓

2) Hay más de una persona con 0 amigos.
Trivialmente hay dos con la misma cant. de amigos (0). ✓

3) Hay exactamente una persona con 0 amigos.
Sacamos a esa persona del cjto. de palomas.
El resto de personas tiene entre 1 y $n-2$ amigos.
Palomas: $n-1$
Nidos: $n-2$ ✓