Prácti

Ejercicio 7. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i. → queremos un 0

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$2 \leq x_2 \leq 4$ C.V. $\overline{x_2} = x_2 - 2$ $0 \leq \overline{x_2} \leq 2$

- Nosotros sabemos hallar la cantidad de sols. a

$x_1 + \dots + x_n = N$

$x_i \geq 0$: Cant. sols. CR^n_N

$x_i > 0 \iff x_i \geq 1$

- Sols. a $x_1 + \dots + x_n = N$ pero con restricción $x_1 \geq 9$

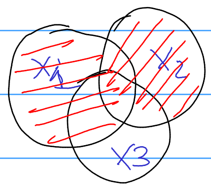
$x_i \geq 0$.

Cambio de variable: $\overline{x_1} = x_1 - 9$

Hay CR^{4}_{N-9}.

(a) la cant. de sols. es

$\underbrace{N}_{\text{Total de sols. sin restricciones}} - \#\{\text{sols. con algún } x_i \geq 9\}$



$C_i: x_i \geq 8$

$N = CR^4_{19}$

Queremos calcular

$$N \underbrace{- N(C_1) - N(C_2) - N(C_3) - N(C_4)}_{S_1} + N(C_1, C_2) + N(C_2, C_3) + N(C_3, C_4)$$

$$+ N(C_2, C_4) + N(C_1, C_4) + N(C_1, C_3) - N(C_1, C_2, C_3) + \dots$$

Es decir: $N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$

$S_1 = \sum N(C_i) = 4N(C_1) = 4 \cdot CR^4_{10}$.

$S_2 = \sum N(C_iC_j) = \binom{4}{2} N(C_1C_2) = \binom{4}{2} CR^4_1$

$\hookrightarrow$ elijo $\{C_i C_j\}$ entre $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$S_3 = \sum N(C_iC_jC_k) = 0$ La suma mínima con esas condiciones

$S_4 = N(C_1C_2C_3C_4) = 0$ es $27 \Rightarrow N(C_1C_2C_3) = 0$.

Total de sols: $CR^4_{19} - 4CR^4_{10} + \binom{4}{2} CR^4_1$.

(b) Mismo razonamiento, pero ahora $N(C_i) \neq N(C_j)$.

$N(C_iC_j) \neq N(C_kC_l)$

Hacemos el c.v. $\overline{x_3} = x_3 - 3$. Nuestro problema pasa a ser contar sols. de $\boxed{x_1 + x_2 + \overline{x_3} \overset{+3}{+} x_4 = \overset{19}{16}}$

$0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $0 \leq \overline{x_3} \leq 4$, $0 \leq x_4 \leq 8$

$N = CR^4_{16}$

$C_1: x_1 \geq 6$ $\quad C_2: x_2 \geq 7$ $\quad C_3: x_3 \geq 5$ $\quad C_4: x_4 \geq 9$

$S_1 = N(C_1) + N(C_2) + N(C_3) + N(C_4)$

$= CR^4_{10} + CR^4_9 + CR^4_{11} + CR^4_7$

$S_2 = N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + N(C_1C_4) + N(C_2C_3) + N(C_2C_4) + N(C_3C_4)$

$= CR^4_3 + CR^4_5 + CR^4_1 + CR^4_4 + CR^4_0 + CR^4_2$

$S_3 = 0$ no hay sols. que cumplan tres condiciones y sumen < 18.

$S_4 = 0$

Total sols.: $CR^4_{16} - (CR^4_{10} + CR^4_9 + CR^4_{11} + CR^4_7) + CR^4_3 + CR^4_5 + CR^4_1 + CR^4_4 + CR^4_0 + CR^4_2$.

(d) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

$n!$ = Cantidad de permutaciones de un cjto de n elementos

1 2 3 4

2 1 4 3. ↳ no fija elem.

1 4 2 3 ↳ fija al 1

Una permutación puede:

Regla de la suma

- Fijar 0 elementos: d_4
- Fijar 1 elementos: $4 \cdot d_3$ ↳ fijo un elem
- Fijar 2 elementos: $\binom{4}{2} \cdot d_2$
- Fijar 3 elementos: $\binom{4}{3} \cdot d_1 = 0$ (si fijo 3 el 4º queda fijo)
- Fijar 4 elementos: $\binom{4}{4} \cdot d_0 = 1$

Conclusión: $4! = d_4 + 4 \cdot d_3 + \binom{4}{2} d_2 + \binom{4}{3} d_1 + \binom{4}{4} d_0$
$= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} d_i$

En gral: una permutación fija i elementos, para algún $i = 0, \dots, n$

$$n! = \sum_{i=0}^{n} N_i$$

N_i = # perm. que fija i

$N_i = \binom{n}{i} d_{n-i} = \binom{n}{n-i} d_{n-i}$

$$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} d_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i$$

Ejercicio 8. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Desórdenes: Permutaciones que no fijan ningún elemento.

Ej:

	1	2	3	
cumplen c_1	1	2	3	X
	1	3	2	X
	2	1	3	X
	2	3	1	✓
	3	1	2	✓
	3	2	1	X

$d_3 = 2$

(a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Queremos calcular d_9, hagamoslo usando I-E.

$N = 9! \longrightarrow$ # permutaciones sin restricciones.

c_i: la permutacion fija i.

Queremos calcular

$$N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 - S_7 + S_8 - S_9.$$

$$S_1 = \sum N(c_i) = 9 \cdot N(c_1) = 9 \cdot 8! = 9!$$

$$S_2 = \sum N(c_i c_j) = \binom{9}{2} \cdot 7! = \frac{9!}{2!\cancel{7!}} \cancel{7!} = \frac{9!}{2!}$$

$$S_3 = \sum N(c_i c_j c_k) = \binom{9}{3} \cdot 6! = \frac{9!}{3!}$$

$\vdots$

$$S_k = \binom{9}{k}(n-k)! = \frac{1}{k!(9-k)!} \cdot (9-k)! = \frac{9!}{k!}$$

$\binom{9}{k}$: los que queden fijos; $(n-k)!$: el resto.

Fórmula general: $d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Nos piden $d_9 = 9! \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k!}$