Ejercicio 1. Probar las siguientes identidades, conocidas como las fórmulas de Stifel para Combinaciones, Funciones Sobreyectivas y Números de Stirling:

(a) **Combinaciones** $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$.

(b) **Funciones Sobreyectivas** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(c) **Números de Stirling** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

Ejercicio 3.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

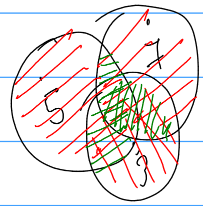
(a) $N = 105$ (total)

C_i = ser divisible entre i.

$N - N(C_3) - N(C_5) - N(C_7) + N(C_3C_5) + N(C_5C_7) + N(C_3C_7) - N(C_3C_5C_7)$

$105 - \left\lfloor \frac{105}{3} \right\rfloor - \frac{105}{5} - \frac{105}{7} + \frac{105}{15} + \frac{105}{35} + \frac{105}{21} - \frac{105}{105}$

$= 105 - 35 - 21 - 15 + 7 + 3 + 5 - 1 = 48.$



Ej: ¿Cuántos mult. de 3 hay entre 1 y 8?

$\{1, 2, \cancel{3}, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8\}$

Hay $\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor$ mult. de 3.

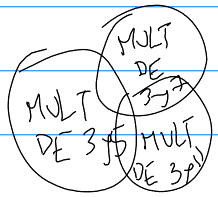
$\underline{7 \cdot 5}$

(b) C_i : ser multiplo de $3 \cdot i$

N = Total de multiplos de 3 entre 1 y $1155 = 1155/3 = 385$

Queremos quitar los multiplos de 5, 7 y 11

$1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$



$N - N(C_5) - N(C_7) - N(C_{11}) + N(C_5C_7) + N(C_5C_{11}) + N(C_7C_{11})$

$- N(C_5C_7C_{11})$

$385 - \frac{385}{5} - \frac{385}{7} - \frac{385}{11} + \frac{385}{35} + \frac{385}{55} + \frac{385}{77} - \frac{385}{385}$

$385 - 77 - 55 - 35 + 11 + 7 + 5 - 1 = 240$

Ejercicio 4. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

0 0 0 0 18 0

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18 \qquad 1 \leq x_i \leq 6$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 36 \qquad 1 \leq x_i \leq 6$

2) Tiene una sola solución $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 6$.

1) Calculemos las sols. a 1)

Nosotros sabemos resolver $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = N \qquad x_i \geq 0$

$x_1 + x_2 + \dots = N \qquad x_i \geq m.$

Primero hacemos un cambio de variables $y_i = x_i - 1 \qquad 0 \leq y_i \leq 5$

La ec. de arriba queda:

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) + (y_6 + 1) = 18$$

$$(*) \; \underset{6}{y_1} + \underset{6}{y_2} + \underset{0}{y_3} + \underset{0}{y_4} + \underset{0}{y_5} + \underset{0}{y_6} = 12 \qquad 0 \leq y_i \leq 5$$

$N =$ Sols. sin restricciones a $(*)$ $\quad y_i \geq 0. \quad CR^6_{12}$

$c_i: (y_i \geq 6)$

Hay

$$N - 6N(c_i) + \binom{6}{2} N(c_i c_j) - \binom{6}{3} N(c_i c_j c_k) + N(c_i c_j c_k c_l) + \dots$$

$CR^6_{12} - 6 \cdot CR^6_6 + \binom{6}{2} \underset{\substack{\| \\ 1 = CR^6_0}}{} \qquad \underset{0}{\|} \qquad \underset{0}{\|}$ (no hay sols. con esas cond.)

Total: $CR^6_{12} - 6 \cdot CR^6_6 + \binom{6}{2}$.

→ Para calcular $N(c_i)$ podemos hacer el c.v. $\tilde{y}_i = y_i - 6$

→ Para calcular $N(c_i c_j)$ también puedo hacer c.v. $\tilde{y}_i = y_i - 6 \qquad \tilde{y}_j = y_j - 6$

$$\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 0$$