Práctica 4:

Ejercicio 8. Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

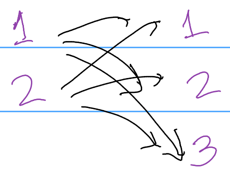
(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

(a) $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$. (Regla del Producto)

opc $f(1)$ $f(2)$ $f(n)$



$f(1)$	$f(2)$
~~1~~	~~1~~
1	2
1	3
2	1
~~2~~	~~2~~
2	3
3	1
3	2
~~3~~	~~3~~

(b) Inyectiva: si $i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$.

$$\underbrace{m \cdot m-1 \ldots m-n+1}_{n \text{ elem.}} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

(c) Inyectiva + Sobreyectiva (todo elemento de B tiene preimagen)

Al ser inyectiva, f es sobre $\Leftrightarrow \#B = n$ (es decir, $m=n$)

$\Rightarrow$ hay $m! = n!$ funciones biyectivas.

Ej $A = \{1, \ldots, 5\}$ $B = \{1, \ldots, 5\}$

$1 \to 5$, $2 \to 2$, $3 \to 3$, $4 \to 1$, $5 \to 4$

$f(1) = 5$ $f(2) = 2$ $f(3) = 3$ $f(4) = 1$ $f(5) = 4$

(d) $f(i) < f(j)$ si $i < j$

$A = \{1, \ldots, 5\}$ $B = \{1, \ldots, 7\}$ no alcanza con $f(i) \geq i$

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 7$, $f(5) = 6$

Si elijo n elementos de B

$I = \{b_1, \ldots, b_n\}$

¿Cuántas funciones crecientes tenemos con imagen I?

Ordeno I: $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$

Hay sólo una función creciente est. con esa imagen: $i \mapsto b_i$

En total hay C^m_n funciones est. creciente.

En el ejemplo $C^7_5 = 21$

(e) $f(i) \leq f(j)$ si $i < j$

Ejemplo: $f(1)=1$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$\vdots$

En el ejemplo anterior hay una sola f creciente con Img

1-2-3-4-4

$f(1)=1 \quad f(2)=2 \quad f(3)=3$

$f(4)=4 \quad f(5)=4$.

Como antes pero ahora admitimos repetición. CR^m_n

En el ejemplo $CR^7_5 = \binom{11}{5}$

(f) Tenemos r_i dados tales que $r_1+r_2+\dots+r_m=n$

Hay r_i elementos con imagen i.

$A=\{1,\dots,n\}$

$B=\{1,\dots,m\}$

¿Cuántas formas de elegir las r_1 preimag. del 1 tengo?

$A=\{\cancel{1},2,\cancel{3},4,\cancel{5}\}$ $\quad B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$r_1=1 \quad r_2=2 \quad r_3=2 \quad r_4=r_5=r_6=r_7=0$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. preimg.} \\ \text{del 1}}}{C^5_1=5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. preimg} \\ \text{del 2}}}{C^4_2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. preimg.} \\ \text{del 3}}}{C^2_2}$

En gral: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{preimg.} \\ \text{del 1}}}{C^n_{r_1}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{preimg} \\ \text{del 2}}}{C^{n-r_1}_{r_2}} \cdot C^{n-r_1-r_2}_{r_3} \cdot \dots \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{preimg. del} \\ 2}}{C^{n-r_1-\dots-r_{m-1}}_{r_m}}$

Desarrollemos esto...

$$\frac{n!}{r_1!\cancel{(n-r_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-r_1)!}}{r_2!\cancel{(n-r_1-r_2)}} \cdot \frac{\cancel{(n-r_1-r_2)!}}{r_3!(n-r_1-r_2-r_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-r_1-\dots-r_{m-1})!}{r_m!\underbrace{(n-r_1\dots-r_m)!}_{0!=1}}$$

$$= \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_m!}$$ ⇝ # Funciones que alcanzan a i r_i veces.

Ejercicio 1. Probar las siguientes identidades, conocidas como las fórmulas de Stifel para Combinaciones Funciones Sobreyectivas y Números de Stirling:

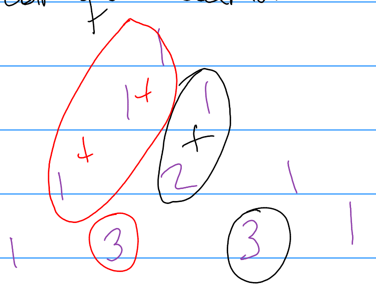
(a) **Combinaciones** $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$.

$$C_{n+1}^{m+1} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m+\cancel{1}-(n+\cancel{1}))!}$$

(b) **Funciones Sobreyectivas** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1)+Sob(m,n))$.

(c) **Números de Stirling** $S(m+1,n) = S(m,n-1)+nS(m,n)$.

Recordar que usamos esa identidad en el P3.



$$= \begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{array}$$

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$$

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n+1} + \binom{m}{n}$$

(a) $$\frac{m!}{n!\,(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!\,(m-(n+1))!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)(m-n-1)!}\cdot\frac{n+1}{n+1} + \frac{m!}{(n+1)\cdot n!\,(m-n-1)!}\cdot\frac{m-n}{m-n}$$

$$= \frac{m!\,(n+1)}{\underbrace{(n+1)\cdot n!}_{(n+1)!}\,\underbrace{(m-n)\,(m-n-1)!}_{(m-n)!}} + \frac{m!\,(m-n)}{(n+1)!\,n!\,(m-n)(m-n-1)!}$$

$$= \frac{m!\,(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!\,(m-n)!}$$

$$= \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}$$

$$= \frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m+1-(n+1))!} = C_{n+1}^{m+1}$$

$$(m+\cancel{1}-n-\cancel{1})$$